UNE FORME EMBRYONNAIRE DU CONCEPT DE DÉRIVÉE INDUITE PAR UN MILIEU GRAPHICO-CINÉMATIQUE DANS UNE PRAXÉOLOGIE « MODÉLISATION »

Jean-Yves Gantois*, Maggy Schneider**

AN EMBRYONIC FORM OF THE CONCEPT OF DERIVATIVE INDUCED BY A GRAPHICAL-KINEMATIC MILIEU IN A "MODELING" PRAXEOLOGY

Abstract – This article is about the learning of the calculation of derivatives by students aged 16 to 17 years who are struggling with issues involving rectilinear motions, their associated speeds (whether variable or not), and graphs depicting the position functions.
One analyses these issues as being components of an environment and as the embryonic forms taken by knowledge built in this context. This research also illustrates a praxeology of the "modelling" type, and the particular type of technical discourse capable of justifying the techniques developed at this stage.

Keywords: derivatives, environment, motion and speed, embryonic form of knowledge, praxeology of the "modelling" type.

UNA FORMA EMBRIONARIA DEL CONCEPTO DE DERIVADA INDUCIDA POR UN MEDIO GRAFICO–CINEMATICO EN UNA PRAXEOLOGIA DE "MODELACION"

Resumen – Este artículo concierne el aprendizaje del cálculo de derivadas en alumnos de 16-17 años quienes tratan cuestiones relacionadas con movimientos rectilíneos, sus velocidades variables o no y sus correspondientes gráficas de sus leyes de posición.
Analizamos estas cuestiones como componentes de un "medio" (milieu), y las formas embrionarias tomadas como conocimiento construido en este contexto. Esta investigación también muestra en qué consiste una praxeología de tipo "modelación" y el tipo particular de discurso tecnológico capaz de justificar las técnicas desarrolladas en esta etapa.

Palabras-claves: derivadas, medio, movimiento y velocidad, forma embrionaria de conocimiento, praxeología de tipo "modelación".

RÉSUMÉ

Cet article concerne l'apprentissage du calcul des dérivées tel qu'étudié chez des élèves de 16-17 ans aux prises avec des questions mobilisant des mouvements rectilignes, leurs vitesses variables ou non et les graphiques de leurs lois de position.
On y analyse ces questions comme composantes d'un milieu et les formes embryonnaires que prend le savoir construit dans ce contexte. Cette recherche illustre en outre en quoi consiste une praxéologie de type « modélisation » et le type particulier de discours technologique susceptible de justifier les techniques mises au point à ce stade.

Mots-Clés : dérivées, milieu, mouvements et vitesses, forme embryonnaire d'un savoir, praxéologie « modélisation ».

* ICHEC Brussels Management School, jeanyves.gantois@ichec.be

** ULg (Université de Liège), mschneider@ulg.ac.be

Cet article étudie les potentialités et les limites d'un certain « milieu » dans l'apprentissage des dérivées au niveau de l'enseignement secondaire. Ce milieu est qualifié de « graphico-cinématique » en ce sens que les tâches qui sont dévolues aux élèves mobilisent des mouvements rectilignes précisés par une loi de mouvement, d'abord donnée sous forme graphique, assortie ensuite d'une expression analytique. En outre, ces mouvements sont quelconques pour privilégier la variété graphique, l'étude ne portant pas sur d'éventuelles forces les régissant : on est donc bien non dans le cadre de la dynamique mais dans celui de la cinématique.

Au delà de l'étude de ce milieu, il s'agit d'illustrer en quoi peuvent consister des praxéologies de type « modélisation », les formes embryonnaires qu'y prennent les savoirs mathématiques (Schneider, 1988, 2011)[1] et ce qu'elles supposent en termes de discours technologique qui légitime une technique mathématique dans un contexte particulier sans forcément relever d'un discours proprement mathématique.

Plusieurs thématiques mobilisées ici ont été travaillées dans des recherches antérieures sur l'analyse mathématique, en particulier : le rôle des métaphores (Lakoff & Nunez 1997), la présence d'un mouvement non uniforme, fût-il virtuel, et de références temporelles (Rosenquist & McDermott 1987 ; Schneider 1988), l'articulation « local-global » (Schneider 1988 ; Maschietto 2002), le rôle du milieu « graphique » (Bloch 2000), l'importance des outils de médiation sémiotique (Falcade 2006) et la séparation entre discours technologique et discours théorique (Hardy 2009) sur laquelle nous reviendrons. Mais notre apport particulier est d'analyser l'impact sur la construction de savoirs par les élèves des variables didactiques des situations qui leur sont proposées et dont nous cherchons à mettre en évidence le caractère fondamental par rapport au savoir visé.

Dans un premier temps, nous décrivons le cadre théorique retenu : en particulier, nous précisons notre acception du concept de milieu ainsi que le niveau praxéologique auquel se situe l'apprentissage visé. Ensuite, nous nous focalisons sur quelques situations extraites d'une ingénierie didactique ample, celles qui visent une genèse du concept de vitesse instantanée : les référents épistémologiques et didactiques au principe de leur construction, ce qu'on peut en attendre dans les classes, ce qui a pu y être observé et ce qui permet de l'interpréter. En bref, les analyses standard constitutives de la méthodologie de recherche propre à la théorie des situations didactiques. Enfin, nous situons les apprentissages observés dans une approche plus globale des dérivées et soulevons la question de la nature et de la pertinence d'un discours technologique qui ne s'apparente que de loin à la théorie mathématique.

LE CADRE THÉORIQUE

1. **Une acception large du concept de milieu**

Le concept de milieu tel que nous l'entendrons ici renvoie aussi bien à la théorie des situations didactiques (TSD) qu'à la théorie anthropologique du didactique (TAD). En référence au premier cadre théorique, nous parlerons du milieu comme ce qui autorise une déclinaison adidactique d'une situation fondamentale modélisant un savoir donné. Cependant, nous considérerons le milieu en un sens très large, comme le font Laborde et Capponi (1994) qui parlent de Cabri-géomètre comme « constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique ». Et, à l'instar de Fregona (1995), nous estimons que le milieu comporte non seulement des aspects « antagonistes », en tant que système mettant à l'épreuve des connaissances devenues inopérationnelles, mais aussi des aspects « alliés ». Ceux-ci sont précisément liés au milieu de la théorie anthropologique que Perrin-Glorian (1999) assimile à ce qu'elle appelle le milieu potentiel, soit « l'ensemble des objets pour lesquels le rapport personnel est stable et conforme au rapport institutionnel, lui-même stable ». Ainsi, pensons-nous montrer qu'un certain rapport des élèves aux vitesses telles qu'appréhendées à travers des graphiques favorise une première émergence du concept de dérivée.

Mais, un milieu, c'est aussi ce qu'un professeur exploite d'un dispositif donné pour enseigner et ce que les élèves s'approprient de son discours pour apprendre. L'étude du milieu et de son impact sur l'apprentissage suppose donc de considérer ce que Assude, Mercier et Sensevy (2007) nomment le jeu des acteurs avec le savoir qui comprend non seulement les « jeux possibles de l'élève » confronté à des

[1] L'auteur utilise cette expression en soulignant son caractère contextuel : ces formes embryonnaires sont à décrire au cas par cas, en relation avec le contexte où elles prennent racine.

tâches qui lui sont dévolues mais aussi les « jeux possibles du professeur sur les jeux de l'élève ». Intégrant les exigences de la TSD en matière d'épistémologie des savoirs aux dimensions institutionnelles de la TAD, Mercier (2008) montre alors l'importance, dans la gestion de la classe, de jeux de langage susceptibles de produire des significations nouvelles.

2. Un apprentissage inscrit dans une praxéologie « modélisation »

Les enjeux de notre recherche ne peuvent se comprendre sans faire référence à ce que Schneider (2008) appelle des « praxéologies de modélisation ». Le concept de praxéologie est celui de la théorie anthropologique du didactique, qui nous paraît propre à modéliser l'activité mathématique pourvu qu'on l'utilise pour rendre compte de l'économie de pensée et d'action que celle-ci autorise : pour accomplir certaines tâches de manière efficace et conviviale, les mathématiciens ou d'autres mettent au point des techniques qu'ils prennent la peine de justifier et de rendre intelligibles. Leurs discours technologiques sont peu à peu « englobés » dans des organisations déductives qu'on appelle théories ou remplacés par celles-ci et ce point fera ici l'objet d'un questionnement. Optant délibérément pour un regard « macro » focalisé sur la genèse scolaire des mathématiques en ne considérant que des types de tâches ayant un caractère fondamental dans l'activité mathématique, Schneider (2008) considère alors deux sortes de praxéologies, tant comme processus que comme produits de ceux-ci.

D'abord des praxéologies « modélisation » dans lesquelles les tâches consistent à modéliser par des concepts mathématiques des systèmes intra ou extra-mathématiques faits d'objets préconstruits au sens de Chevallard (1991). Ceux-ci, telles les aires ou les vitesses, ne sont pas définis d'emblée par le biais de concepts mathématiques, en l'occurrence le concept de limite. Ils existent seulement par le truchement d'une désignation, non pas construits mais présentés « par une deixis qui est un appel à la complicité dans la reconnaissance ontologique » (Chevallard 1991). On cherche, dans un premier temps, non à les définir mais à les déterminer par l'une ou l'autre technique en s'appuyant sur les convictions, images, intuitions que l'on peut avoir à leur propos. Ils fonctionnent alors comme des « objets mentaux » au sens de Freudenthal (1973), soit en quelque sorte comme des substituts de concepts.

Ensuite les praxéologies « déduction » dans lesquelles les objets préconstruits laissent place à des concepts proprement mathématiques, existant cette fois par le truchement d'une définition qui va donner prise au raisonnement déductif. C'est qu'alors les tâches majeures sont axées sur la constitution d'une organisation déductive : il s'agit, par exemple, d'établir un système d'axiomes « simple » et non redondant, de conjecturer un ordre d'agencement de théorèmes et de le faire aboutir sur la base des règles d'inférence du calcul propositionnel et de celui des prédicats… Dans cette perspective, les aires sont définies comme des intégrales et les vitesses comme des dérivées, les unes et les autres étant donc des cas particuliers du concept de limite qui, formulé en termes de quantificateurs et d'inégalités, inspire alors un mode de preuves exemptes de toute considération géométrique ou cinématique.

Comme montré par Schneider (1988, 1992), la modélisation, par le biais de concepts d'analyse mathématique, de grandeurs telles que aires, volumes, vitesses suppose un apprentissage qui ne va pas de soi. Et c'est ce que nous avons étudié à propos des vitesses, nous situant donc dans une praxéologie modélisation, non seulement pour jauger le saut épistémologique qui existe entre le préconstruit « vitesse » et le concept de dérivée, mais aussi pour étudier en quoi un travail sur les vitesses peut fournir ou non aux élèves des images propres à alimenter leur perception du calcul de dérivées dans des contextes qui ne sont plus cinématiques. C'est là l'objectif majeur de notre ingénierie didactique, à laquelle nous prêtons donc un rôle essentiellement phénoménotechnique : fournir des observables pour alimenter l'étude de la question et suggérer des pistes d'enseignement. En particulier, les gestes et mots par lesquels les élèves s'emparent des objets du milieu sont ceux qui pourraient structurer un discours heuristique du professeur sur le sujet (Schneider 2011).

QUELQUES JALONS ÉPISTÉMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES

1. Le préconstruit 'vitesse'

En quoi consiste le préconstruit vitesse dans l'expérimentation relatée ici ? Les élèves concernés sont en 2ème année de lycée et ont environ 16-17 ans. On peut donc faire l'hypothèse qu'ils ont atteint le stade des opérations formelles au sens de Piaget (1972) et que, par conséquent, ils maîtrisent depuis longtemps la vitesse comme grandeur-quotient « espace/durée », qu'elle soit constante ou moyenne sur un intervalle de temps donné. Ceci suppose, au-delà d'une élaboration qualitative de la vitesse, que l'étude de mouvements successifs aussi bien que simultanés puisse être quantifiée en reposant à la fois sur une mesure physique et non plus subjective du temps et sur l'intervention de proportions telles que $e_1/e_2 = t_1/t_2$. L'enjeu est ici de passer à « l'instantané ». Mais la nature même de la grandeur 'vitesse' la rend particulière par rapport à cet objectif, ainsi que Schneider (1988, 1992) l'a analysé. Résumons ci-dessous quelques points de cette analyse.

Contrairement à l'aire, la vitesse est une grandeur intensive c'est-à-dire une « espèce de grandeur pour laquelle l'addition n'est pas définie, mais où l'on peut définir la relation d'inégalité (plus grand que) » (Lalande 1932). De cela découle que la vitesse ne se prête pas aisément à une mesure directe, par rapport à une autre grandeur de même espèce prise comme unité. Si mesures il y a, elles portent la plupart du temps sur l'espace parcouru et le temps écoulé et, par conséquent, la détermination d'une vitesse suppose, de plus, un calcul portant sur ces mesures. Le problème est que, dans cette perspective, le calcul devient sujet à caution dans le cas d'une vitesse instantanée puisqu'il revient à diviser 0 par 0. Quant aux actes de mesurages, ils s'accommodent mal de l'instantané, puisqu'ils requièrent immanquablement un certain temps d'observation et de lecture, fût-il petit.

Du point de vue de la perception sensorielle, il existe également un clivage très net entre une « vitesse instantanée » et une vitesse moyenne sur un intervalle de temps. C'est que la perception d'une vitesse suppose la coordination de deux sensations : l'observation d'images changeantes, d'une part, et le 'sentiment de durée', d'autre part. Mais, à nouveau, l'enregistrement de toute perception au niveau du cerveau suppose un laps de temps minimal.

Dans le monde des sens et des mesures existe donc un fossé important entre vitesses moyennes et vitesses instantanées, plus important par exemple qu'entre aires rectilignes et aires curvilignes lesquelles peuvent être comparées les unes aux autres du seul regard et se prêter toutes également à la technique du pesage qui en fournit une mesure. Or, comme l'a montré Schneider (1988) dans plusieurs contextes, une vision positiviste des mathématiques constitue un obstacle épistémologique majeur : dans le cas présent, il s'exprime par un déni du concept de vitesse instantanée que les élèves ne parviennent pas à concevoir comme concept imaginé par l'esprit humain mais qu'ils pensent plutôt comme prolongement ou copie d'une 'expérience sensible' dans laquelle l'instantané n'a pas droit de cité : « Une vitesse instantanée, ça n'existe pas – disent-ils -, il n'y a pas moyen de la mesurer, car le temps de regarder sa montre et du temps s'est déjà écoulé ». Dans l'histoire des mathématiques, c'est également une telle vision qu'exprime Berkeley (XVII^e siècle) lorsqu'il critique, lui aussi en référence à la difficulté de mesurer, le concept d'*ultima ratio* de Newton qui préfigure d'une certaine façon notre concept de limite : « […] comment peut-on concevoir une vitesse au moyen de telles limites ? Une vitesse dépend du temps et de l'espace, et ne peut être conçue sans eux […] car, considérer le rapport de deux choses suppose que ces choses aient une grandeur et que cette grandeur puisse être mesurée ». Comme l'indique ce dernier mot, c'est bien là un propos où le point de vue adopté est celui de la mesure et non celui d'une grandeur définie par l'entremise d'un concept mathématique.

Il s'agit ici d'étudier certaines conditions d'émergence de la vitesse instantanée telle que définie par le biais du concept de dérivée et, en particulier d'analyser en quoi un milieu de type graphico-cinématique peut nourrir cette conceptualisation de connaissances plus qualitatives. Nous utiliserons ce dernier qualificatif, plus largement que Piaget, dans une acception commune voulant simplement signifier par là que, en certaines circonstances, on peut savoir, par exemple, si la vitesse variable d'un mobile est 'de plus en plus grande' ou 'plus grande que' celle d'un autre sans avoir quantifié la vitesse instantanée comme calcul de limite.

2. Un problème référent, ses variables et leur impact

Comme le montre l'analyse supra, il y a du chemin à parcourir entre une première appréhension des vitesses variables et leur modélisation au moyen des dérivées. En quoi pourrait consister un tel chemin et quelles situations pourraient y mener les élèves ? Pour répondre à cette question, Schneider (1988, 1992) a proposé à des élèves de lycée un problème de « taux liés » dont elle analyse les variables didactiques et leur impact. Nous reprenons ici quelques éléments de son analyse dans la mesure où le début de notre ingénierie didactique se définit par rapport à ce problème. Ce dernier mobilise un débit qui est une vitesse particulière jouant le rôle de préconstruit avec les mêmes caractéristiques que celles relevées ci-dessus. En voici l'énoncé : « Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm/min. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100 cm³/min ? ».

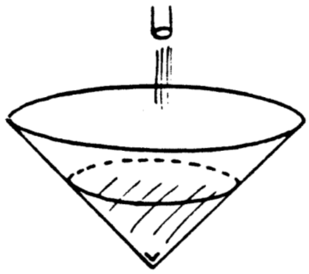


Figure 1.

Dans ce problème, deux grandeurs sont mobilisées et liées l'une à l'autre : la hauteur h de l'eau dans le vase, d'une part et son volume V, d'autre part. Connaissant la vitesse de variation de h, on pose une question relative à la vitesse de variation de V, soit le débit. Ce problème fait donc partie de la classe des problèmes appelés problèmes de « taux liés » ou de « vitesses liées ». En outre, dans le cas présent, h évolue à vitesse constante et, dans le contexte considéré d'un vase s'élargissant, ce fait induit l'intuition que le débit augmente constamment. Et, selon une hypothèse implicite de continuité, ce débit ne peut que passer par toutes les valeurs et vaudra donc 100 à un moment donné, sous entendu bien sûr que l'eau n'aura pas débordé jusque-là. Ce contexte a pour effet d'enclencher un investissement des élèves dans la résolution du problème, ceux-ci percevant d'emblée la nature de la difficulté relative à la variabilité du débit mais ne doutant pas de l'existence d'une solution.

Une autre variable didactique de cette situation tient en ceci : la question n'est pas de savoir ce que vaut le débit en un instant donné mais de déterminer le moment précis où le débit aura telle ou telle valeur. C'est là une manière d'éviter, dans un premier temps, de faire référence au concept savant de « débit en $t = 2$ », par exemple, pour laisser les élèves se polariser sur la globalité du phénomène et sur la variation du débit. Cela a deux effets. D'abord les élèves engagent spontanément le concept de débit moyen, le seul qu'ils connaissent. Ensuite, après avoir fait quelques approximations de la réponse demandée, ils débattent de la nécessité d'algébriser non seulement la variable temps mais aussi sa variation pour arriver *in fine*, avec l'aide du professeur, à l'égalité :

$$\pi t^2 + \pi t \cdot \Delta t + \frac{\pi\,(\Delta t)^2}{3} = 100$$

dans laquelle le premier membre est l'expression simplifiée du débit moyen sur l'intervalle $[t\,; t + \Delta t]$. La vue globale de cette équation à deux variables et le désir de ne garder que l'inconnue principale t poussent alors certains élèves à identifier une action possible : annuler Δt, ce qui conduit à l'équation $\pi t^2 = 100$ dont la solution serait la réponse à la question posée. Ainsi, le choix de t comme inconnue conduit à l'émergence non pas du nombre dérivé, savoir d'ordre numérique et local, mais de la fonction dérivée qui se situe dans l'algébrique et le global et qui fait l'efficacité du calcul infinitésimal.

Mais la suppression des termes en Δt soulève un débat collectif au cours duquel certains élèves récusent le concept de débit instantané : « En un temps nul, aucun volume n'est versé et on ne peut pas avoir un débit avec un volume nul », souvent en référence à l'impossibilité de faire des mesures en un temps nul ce qui est révélateur, comme décrit plus haut, de leur vision positiviste des mathématiques. Le contexte précis du vase s'élargissant joue alors un rôle bien spécifique car il se prête à une preuve pragmatique qui se formule comme suit : « Posons à côté du vase conique un vase cylindrique de base 100 cm^2. Au lieu de considérer une seule pompe, on en prend deux qui alimentent chacune un des vases, de telle manière que, dans les deux, le niveau de l'eau y monte régulièrement et simultanément de 1 cm/min. La pompe qui alimente le cylindre a évidemment un débit constant de 100 cm^3/min. L'autre pompe devra verser moins vite que la première tant que le cône est plus étroit que le cylindre, et plus vite que celle-ci après. Les deux pompes ont donc un même débit égal à 100 cm^3/min à l'instant précis où la superficie de l'eau dans le cône vaut 100 cm^2, ce qui donne :

$$\pi h^2 = \pi t^2 = 100,$$
$$t = 10 \,/\, \sqrt{\pi}. \text{ »}$$

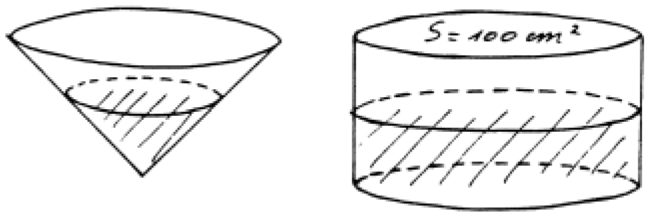


Figure 2.

Au terme de ce travail, le professeur institutionnalise le débit instantané comme le résultat obtenu en supprimant les termes contenant Δt dans l'expression du débit moyen sur l'intervalle $[t\,;\, t+\Delta t]$, après avoir fait toutes les simplifications algébriques standard. Le qualificatif « instantané » se justifie alors par le fait que ce calcul permet de répondre avec exactitude à une question qui relève de l'instantané, la preuve en étant fournie par l'expérience de pensée reprise plus haut.

UNE INGÉNIERIE DIDACTIQUE BASÉE SUR DES ÉTUDES GRAPHIQUES DE MOUVEMENTS ; DEUX ANALYSES A PRIORI DE MOMENTS CLES

Le problème analysé brièvement ci-dessus se prête peu au travail graphique, même si certains élèves ébauchent le graphique du volume d'eau en fonction du temps ou celui du débit. Il faut alors ménager un travail qui donne l'occasion aux élèves de rapprocher vitesse ou débit instantané, d'une part, et pente de tangente, d'autre part, pour tenter de rejoindre ce qui s'enseigne classiquement. Dans un souci d'économie se pose ainsi la question d'un dispositif didactique qui conjuguerait à la fois une interprétation cinématique de la dérivée et son interprétation graphique. C'est là notre entreprise dont rend compte cet article.

1. Comparer un mouvement uniforme et un qui ne l'est pas : les stratégies possibles

Les mouvements proposés ici sont des mouvements rectilignes qui ont un caractère épuré : on imagine deux particules ponctuelles, P_1 et P_2, qui se meuvent sur un axe orienté muni d'une origine et d'une unité. Sans respecter la chronologie de l'ingénierie concernée ici, commençons par décrire le problème qui, dans ce contexte, fait pendant au problème du vase conique, en ce sens qu'il en adopte plusieurs variables didactiques, ainsi que nous l'analyserons plus loin. Il s'agit de comparer deux mouvements rectilignes, le premier étant uniforme et le second étant un mouvement accéléré. Ces mouvements sont précisés dans un premier temps par les graphiques de la figure 3.

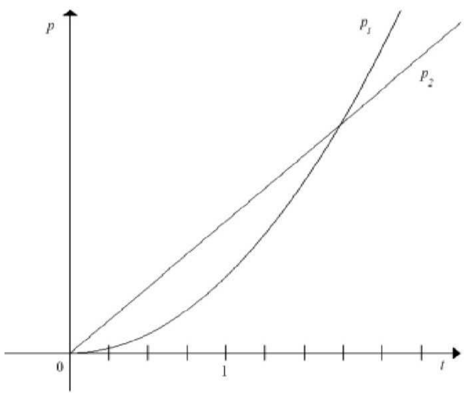


Figure 3.

La question centrale posée aux élèves est de déterminer le plus précisément possible l'instant où les deux mobiles ont la même vitesse. Les réponses attendues à cette question sont multiples et ont été effectivement observées (Gantois et Schneider 2009). D'abord, les élèves peuvent considérer, à vue, le point de la courbe où la tangente[2] est parallèle au graphique du mouvement uniforme et considérer l'abscisse du point comme réponse. Ils peuvent aussi évaluer l'abscisse correspondant à une différence d'ordonnées maximale. Enfin, ils peuvent situer l'instant cherché à l'intérieur d'un même intervalle de temps sur lequel la variation de position est identique pour les deux mouvements. Nous reviendrons plus loin sur le bien-fondé de ces stratégies graphiques et leur plausibilité chez les élèves concernés pour nous attarder dans un premier temps sur les types de calculs auxquels elles peuvent conduire lorsque les lois de position sont précisées par des expressions analytiques. Supposons d'abord que $p_1(t) = t^2$ et $p_2(t) = \sqrt{3}t$.

La première stratégie, que nous appellerons stratégie des droites parallèles, se décline selon trois variantes. Premièrement, effectuer le déplacement d'une droite parallèlement à $p_2(t)$, ce qui conduit à réduire l'intervalle contenant l'instant cherché jusqu'à un point unique, comme illustré par la figure 4. Cette technique fonctionne parce que la vitesse de la particule correspondant à $p_1(t)$ est strictement monotone. Deuxièmement, tracer d'une droite ayant la même pente que la droite de référence à l'endroit où la courbe a également la même « pente » que cette droite. Ceci n'exige pas nécessairement de faire référence à la croissance de la vitesse d'une des particules mais peut s'appuyer sur le fait que la « pente de la courbe » (ou celle de sa tangente) donne bien la vitesse instantanée du mobile. Troisièmement, effectuer le déplacement d'une droite, tangentiellement à la courbe, de l'origine jusqu'au point où sa pente est égale à celle de $p_2(t)$. L'abscisse de ce point est l'instant cherché. Le raisonnement présuppose l'idée, qu'à l'instant cherché, la vitesse qui était inférieure à la vitesse de référence lui devient supérieure.

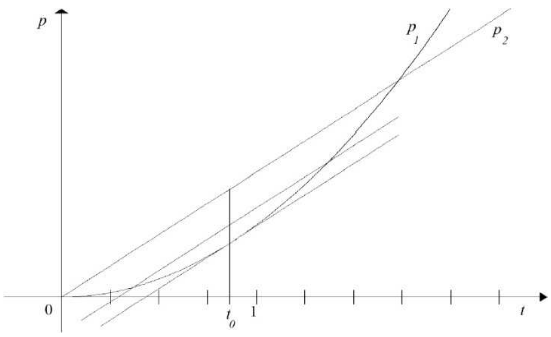


Figure 4.

De ces trois variantes de la première stratégie, seules les deux premières peuvent être algébrisées par des élèves qui ne maîtrisent pas encore la notion de tangente au sens de l'analyse, sous une même forme d'ailleurs, en exigeant que le système suivant ait une seule solution :

$$\begin{cases} p(t) = \sqrt{3}\,t + k \\ p(t) = t^2 \end{cases}$$

le point d'intersection entre la tangente et la courbe étant unique. Le discriminant de l'équation $t^2 - \sqrt{3}t - k = 0$ est alors nul et l'instant cherché est la racine double de cette équation. Cette démarche suppose évidemment, de la part des élèves, une bonne maîtrise d'un travail algébrique exploitant des paramètres.

Une seconde stratégie consiste à trouver l'instant où l'écart de position entre les deux particules est maximal (figure 5). En effet, lorsqu'au début, l'écart augmente, c'est que la particule P_2 va plus vite que P_1 ; plus tard, on constate que cet écart diminue, signe que, désormais, P_1 va plus vite que P_2. L'instant cherché est donc l'instant où l'écart cesse de croître pour commencer à décroître. Le calcul conduit à trouver le maximum d'une fonction du second degré : $\sqrt{3}\,t - t^2$. L'instant cherché est alors l'abscisse du sommet de la parabole.

[2] Cet article portant principalement sur la notion de vitesse, nous ne nous attarderons pas sur une analyse des diverses conceptions de la tangente qui peuvent être mobilisées ici. Cependant, en référence à la recherche de Castela (1995), nous préciserons que, dans ce qui suit, une conception « Intersection Globale » héritée de la tangente au cercle suffit tant pour imaginer les stratégies graphiques prévues que pour les traduire algébriquement. Ce qui n'empêche que soient travaillées, dans les situations présentes, d'autres conceptions de la tangente, en particulier celle d'une droite rencontrant la courbe en deux points « infiniment proches » telle que rencontrée chez Leibniz. Mais cela pourrait faire l'objet d'un autre article à part entière.

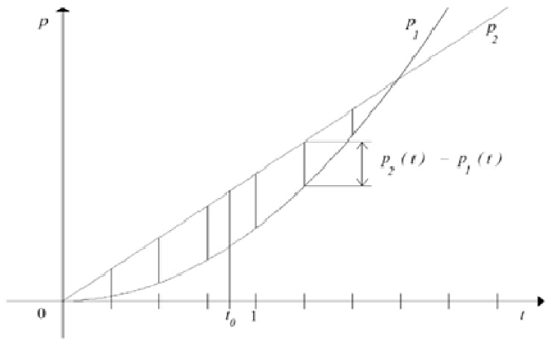


Figure 5.

La troisième stratégie consiste à découper les mouvements respectifs des deux particules selon de petits intervalles de temps de même durée (figure 6) et, pour chacun d'eux, à comparer la vitesse moyenne des deux particules (matérialisée par la pente d'une marche d'escalier) ou, éventuellement, leur variation de position (hauteur des contremarches). L'instant cherché se trouve dans l'intervalle où les vitesses moyennes (ou les variations de position) sont égales. La précision de cette stratégie dépend de la durée de l'intervalle de temps considéré : plus l'intervalle est petit, mieux l'instant cherché est encadré. En réduisant l'intervalle à « rien », c'est-à-dire si l'on considère un intervalle $[t\,;t+\Delta t]$, en prenant $\Delta t = 0$ une fois faites les simplifications algébriques possibles, on obtient également l'instant cherché :

$$\sqrt{3} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \Leftrightarrow \sqrt{3} = 2t + \Delta t \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

lorsque $\Delta t = 0$.

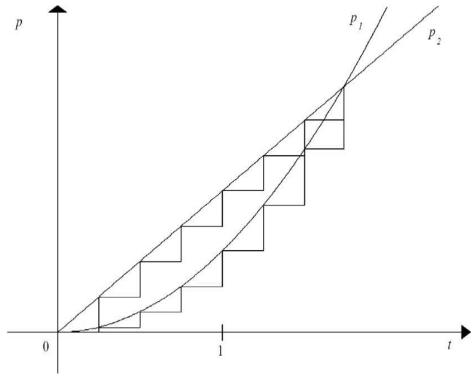


Figure 6.

Des trois stratégies, seule la troisième conduit à un calcul de type « infinitésimal ». Mais elle n'est pas forcément la plus commode. Puisqu'il existe deux autres stratégies, plus faciles à mettre en œuvre et qui évitent de recourir à la troisième stratégie, on ne peut pas dire que cette première question possède un caractère fondamental par rapport au savoir visé, soit la dérivée. C'est pourquoi la situation se poursuit par la donnée d'autres expressions de mouvement, en particulier, on remplace $p_1(t) = t^2$ par $p_1(t) = t^3$. La première stratégie conduit alors à résoudre une équation du troisième degré, ce que les élèves concernés ne savent pas faire, tandis que la seconde stratégie conduit à déterminer le maximum local d'une fonction du troisième degré, ce que les élèves ne savent pas (encore) faire non plus. Par contre, la troisième stratégie conduit à une réponse.

Pourquoi, dès lors, commencer par une expression $p_1(t)$ du second degré et non directement du troisième degré ? En réalité, on s'attend à ce que réduire Δt à zéro soit sujet à caution aux yeux des élèves, comme dans le cas du vase conique. Résoudre d'abord le problème avec une fonction du second degré permet alors de donner une légitimité pragmatique à cette procédure infinitésimale puisque celle-ci donne la même réponse - dans un cas au moins - que celle obtenue par les deux autres stratégies qui seront sans doute jugées moins contestables. Le choix d'une fonction du second degré pour modéliser le mouvement non uniforme est donc, de ce point de vue, une variable didactique importante, puisque l'existence d'au moins une autre méthode va permettre un contrôle de la réponse fournie par le nouveau calcul, celui qui est, *a priori*, sujet à caution en raison de l'annulation de Δt. Ce mode de validation pragmatique est le propre des praxéologies « modélisation » : il permet de donner aux techniques elles-mêmes le statut de modèle mathématique, ici la vitesse instantanée qui sera définie à terme comme le résultat de ce calcul nouveau. Fermat y recourt pour légitimer sa méthode d'adégalité qui fait la part belle aux infinitésimaux jugés douteux en raison de leur double statut : tantôt non nuls, tantôt nuls. En effet, avant de l'exploiter pour trouver de nouveaux résultats, il la met à l'épreuve pour résoudre deux problèmes qui l'avaient été dès l'Antiquité sans usage aucun d'une quelconque notion d'infinitésimal : l'optimisation de l'aire des rectangles isopérimétriques, déjà réglée par Euclide sur base d'une preuve exclusivement géométrique et la détermination de la tangente en un point d'une parabole réalisée par Apollonius de Perge sans aucune considération « infinitésimale ».

En définitive, le caractère fondamental de ce pan d'ingénierie doit être jaugé à l'aune de l'ensemble des déclinaisons associées à cette comparaison de deux mouvements dont l'un est uniforme : approches graphiques et analytiques, mouvement non uniforme régi par une loi du deuxième degré et puis par une autre du troisième degré.

2. Similitudes et différences avec le problème du vase conique ; nécessité d'une situation en amont

Ce problème que nous venons de décrire comporte des similitudes avec celui du vase conique. On remarque effectivement au moins trois variables didactiques communes. D'abord, comme pour le débit, on pose une question relative au temps plutôt que de demander quelle est, à un moment donné, la vitesse du mobile qui accélère. Ensuite, une autre variable didactique est que cette question est relative à un mouvement dont la vitesse est variable, la question dans le problème du vase conique portant sur un débit variable lui aussi. Enfin, la troisième variable didactique consiste en ceci : la procédure infinitésimale peut, dans les deux cas, faire l'objet d'une validation pragmatique : une preuve physique dans le cas du vase conique et, pour la comparaison de mouvements rectilignes, le contrôle par des méthodes algébriques dans le cas où le mouvement non uniforme est donné par une fonction du second degré. On peut s'attendre dès lors à ce que la situation décrite à la section 1 produise des effets comparables à ceux de la situation du vase conique. Nous les résumons ainsi : mise à l'épreuve du concept de vitesse moyenne tout comme le problème du vase conique se prêtait à une mise à l'épreuve du concept de débit moyen ; ensuite, identification d'un même type de calcul nouveau, qui consiste à rendre Δt nul pour obtenir une équation où l'inconnue est le temps ; et, enfin, débat sur la validité de ce calcul.

Cependant, les problèmes comparés ici nous paraissent fort différents du point de vue de la deuxième variable didactique, surtout si l'on considère non pas la variabilité elle-même de la vitesse ou du débit en jeu mais bien la perception que les élèves pourraient en avoir. Dans le problème du vase conique, c'est le contexte de vitesses liées qui est source de cette intuition : comme déjà dit plus haut, vu que la montée de l'eau se fait à vitesse constante et que le vase est de plus en plus large, le débit ne peut que croître et c'est bien ce qu'expriment les élèves. Dans le problème des mouvements, nous misons sur le contraste entre un graphique rectiligne et un qui ne l'est pas, c'est-à-dire entre un mouvement uniforme et un à vitesse variable. Mais l'accès à ces mouvements est ici plus symbolisé que dans le problème du vase conique où le mouvement est décrit de manière brute. En effet, dans le cas présent, les mouvements sont décrits d'abord par des graphiques puis par des expressions analytiques et l'on sait que cela peut poser problème aux élèves. En particulier, plusieurs chercheurs (dont Janvier 1978 et Rouchier 1980) ont pu observer une confusion chez certains élèves entre la trajectoire d'un mobile et le graphique de sa loi de mouvement. C'est pourquoi, il nous paraît utile de créer un milieu en amont du problème qui vient d'être décrit.

Pour préparer les élèves à lire correctement les graphiques des lois de mouvement, une première situation leur est proposée avant la situation décrite à la section 1 ci-dessus. Ils doivent décrire le plus complètement possible (question ouverte) le mouvement d'une particule dont la loi de position est donnée par la figure 7 :

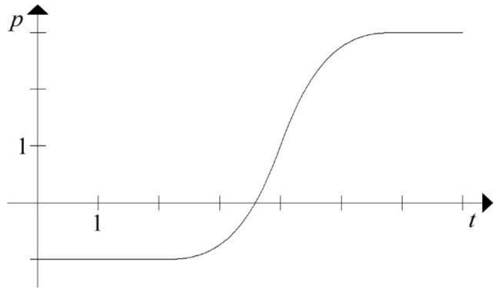


Figure 4.

Un tel graphique permet avant tout de traduire le caractère intensif de la vitesse : en dehors des périodes où le mobile est à l'arrêt et a, par conséquent, une vitesse nulle, on peut dire que la vitesse augmente dans un premier temps puis qu'elle diminue. Notre intention ici est de voir jusqu'à quel point les élèves peuvent s'approprier un tel graphique qu'ils en aient déjà rencontré de semblables ou non en physique. C'est là un premier contact avec des graphiques partiellement **courbes** qui représentent des mouvements **rectilignes** et, cela peut déjà poser problème aux élèves, comme cela a été déjà dit plus haut. Par contre, nous n'avons pas jugé utile de proposer, à ce stade, des graphiques décroissants correspondant à des vitesses négatives. Nous y reviendrons.

EXPÉRIMENTATIONS DE CES PROBLÈMES DANS LES CLASSES : DESCRIPTION ET ANALYSE DE QUELQUES RÉSULTATS

1. Le public d'élèves

Notre ingénierie a été proposée dans plusieurs lycées de l'enseignement général ou de l'enseignement technique de transition. Les classes concernées sont des classes de cinquième (avant dernière année du lycée en Belgique) : les mathématiques y sont enseignées à raison de 8 heures par semaine pour 2 des classes auxquelles a été proposée notre ingénierie, de 6 heures par semaine pour 2 classes ou encore de 4 heures par semaine pour 2 autres classes. Dans ces classes, le professeur avait abordé l'analyse mathématique en commençant par l'étude des limites de fonctions à une variable réelle (dont des suites), le degré de formalisation du concept de limite variant selon le niveau de la classe. Aucun enseignement des dérivées n'avait encore été donné. Seuls quelques élèves avaient été initiés à une approche algébrique des tangentes à des courbes polynomiales, sans référence aucune au concept de limite.

Dans chacune des classes où s'est déroulée l'expérimentation, les élèves ont été invités à former des groupes de quatre et, dans plusieurs cas, l'un de ces groupes a été filmé. Les autres travaillaient en autonomie, le professeur et l'expérimentateur (la même personne dans certaines classes) se contentant la plupart du temps d'interventions qui engageaient les élèves à clarifier ou à préciser leurs propos. Toutes les autres interventions ont été prises en compte dans notre analyse[3]. Tous les groupes devaient remettre un rapport écrit et, après chaque cours, le professeur et l'expérimentateur rédigeaient le leur en fonction de notes prises au vol et partageaient leurs impressions. Les propos repris ci-dessous sont significatifs de la progression observée dans toutes les classes.

Dans ce qui suit, les élèves sont identifiés par une initiale (voire deux si nécessaire) suivie du numéro de son groupe. Le professeur est appelé *Prof* et l'expérimentateur, *Exp*.

Pour rendre compte des observations faites dans les classes et les analyser, nous reprenons l'ordre chronologique des questions dévolues aux élèves. Et nous commençons par décrire comment ils appréhendent un mouvement rectiligne à partir du graphique de sa loi. C'est l'objet de la section suivante.

---

[3] D'ailleurs, les questions dévolues pouvaient l'être partiellement sans empêcher une dimension adidactique à des moments cruciaux. Ainsi, dans des classes plus faibles, une aide a pu être apportée aux élèves lorsque ceux-ci éprouvaient des difficultés à symboliser algébriquement leurs idées.

2. Des représentations graphiques qui se prêtent à une approche qualitative de la vitesse instantanée

Nous illustrons et interprétons ici en quoi les graphiques de lois de mouvement se prêtent à une étude qualitative de la vitesse au sens décrit plus haut. D'abord, les élèves parviennent à y lire les intervalles où la vitesse est variable. Ensuite, ils l'exploitent correctement pour lier accélération ou décélération du mobile au sens de la concavité.

Des graphiques correctement interprétés, un accent mis sur la variation de la vitesse

Rappelons que la première tâche proposée aux élèves observés porte sur la description d'un mouvement rectiligne à partir du graphique de sa loi (celui de la figure 7). Il est à noter, tout d'abord, qu'aucun élève n'a interprété le graphique de la loi de mouvement comme la trajectoire du mobile, contrairement à ce qu'on pouvait craindre. Ensuite, de l'observation des graphiques, on peut *a priori* relever trois caractéristiques : la position du mobile par rapport à l'origine choisie sur la trajectoire en relation avec la situation du graphique par rapport à l'axe des abscisses, le sens de parcours du mobile traduit par la croissance ou décroissance de la courbe et la variation de la vitesse en liaison avec la concavité. Mis à part un débat sur le signe négatif de la position initiale du mobile, l'ensemble des élèves observés se focalisent sur la vitesse et plus précisément sur sa variation. D'abord ils repèrent les intervalles où le mobile est à l'arrêt :

> E1 : Donc, simplement on dit par exemple : ici il ne bouge pas, vu que sa position reste la même alors que le temps augmente…

puis, très vite, ils rapprochent accélération ou décélération du mobile et sens de la concavité de la courbe que certains expriment hâtivement en termes de « parabole dans un sens ou dans l'autre ».

> C1 [s'adressant à N1] : Et puis là, à un moment, on dirait que ça fait une courbe comme ça et puis après, ça fait une parabole inversée comme ça. C'est pas la même parabole. Ça c'est une parabole et puis là ça fait un truc : c'est une parabole dans l'autre sens.
> Exp : Alors ? Tu dis quoi ?
> N1 : Ça veut dire que là il accélère…
> C1 : On dirait que ici, là, c'est une parabole dans un sens et puis là, la parabole est dans l'autre sens, donc c'est pas : il accélère et puis là il décélère ?
> N1 : Ça veut dire que là il augmente plus vite ses mètres en fonction des secondes, et là il augmente moins vite.
> E1 : Oui. C'est l'accélération quoi.

Comme le montre cet échange, l'élément technologique porte sur l'augmentation de la distance par rapport au temps. Mais certains élèves peinent, dans un premier temps, à exprimer cette augmentation comme une différence de positions :

> E1 : En fait quand on regarde dans des intervalles de temps plus petits, on voit qu'à chaque fois la position… si on réduit à chaque fois l'intervalle de temps, on voit que la position change à chaque fois plus par rapport au temps [E1 le montre sur sa feuille où elle prend la position initiale de la particule comme référence et trace des segments verticaux de l'axe des abscisses à la courbe].
> C1 : Chaque seconde… À chaque seconde, la distance est plus grande.
> M1 : C'est pas la même différence de position.
> E1 : Il faut que je voie si la position est de plus en plus grande ou bien si c'est la même.
> Exp : Ok. Donc, quand tu dis : la position est de plus en plus grande, de toutes façons elle est de plus en plus grande.
> E1 : La différence.

Par contre, on peut remarquer ici l'idée d'un découpage du temps de plus en plus fin, ce qui permet d'enclencher un débat sur ce qui distingue vitesse moyenne et vitesse instantanée, débat que l'expérimentateur provoque en demandant à quel type de vitesse on a affaire ici :

> E1 : Il y a vitesse instantanée et vitesse moyenne.
> Exp : Oui. Et ce serait laquelle ? Ou ce serait une autre ou je ne sais pas…
> M1 : Instantanée ?
> Exp : Qu'est-ce que ça pourrait être la vitesse instantanée ?
> E1 : C'est à chaque moment la vitesse qu'on a.
> M1 : Sur un petit intervalle, quoi.
> E1 : Et si on fait la moyenne de toutes les vitesses instantanées qu'on a, là, on aura la vitesse moyenne. Et si on prend à chaque fois le même intervalle de temps…
> C1 : Non, pas vraiment…

> N1 : Il y en a une infinité !

Un peu plus tard, M1 demande aux autres élèves de son groupe pourquoi ils ne parlent pas ici en termes de vitesses instantanées, d'autant que deux d'entre eux avaient parlé de « vitesse moyenne qui augmente à chaque instant ». N'ayant pas été entendu une première fois, il insiste :

> M1 : Mais pourquoi c'est pas bon vitesse instantanée ?
> E1 : Mais, à mon avis, la vitesse instantanée, c'est pour, à chaque fois, un temps de plus en plus… petit, quoi, mais […]
> N1 : Je ne vois pas très bien.
> E1 : Si, genre, si ce n'est même pas une seconde, si c'est une vitesse moyenne, euh… Tu pourras demander au prof. Oui. À mon avis, il faut vraiment un intervalle de temps hyper hyper précis pour avoir la vitesse instantanée.

Ces quelques réactions se doivent d'abord d'être rapportées à la scolarité antérieure des élèves interrogés. Ainsi, n'avons-nous pas rencontré un seul d'entre eux qui confonde la trajectoire et le graphique de la loi de mouvement. Cela s'explique sans doute par le fait qu'ils sont, à ce niveau d'étude, quelque peu familiers de la cinématique, notamment des mouvements rectilignes uniformes et des mouvements rectilignes uniformément accélérés qu'ils ont étudiés au cours de physique lors de l'année précédente. On peut même supposer qu'ils y ont entendu parler de l'expression « vitesse instantanée », même si l'approche reste généralement très sommaire à ce stade faute de connaissances en analyse. C'est aussi par référence à l'expérience scolaire des élèves qu'on peut expliquer leur difficulté à parler de concavité et la façon incongrue dont certains le font. Ils ont en effet étudié les fonctions du second degré lors de l'année scolaire précédente et c'est dans ce seul contexte qu'ils ont rencontré « le sens de la concavité » pour la première fois ; en plus, il n'est pas sûr que leur professeur ait utilisé alors cette dernière expression, se contentant peut-être de parler de « parabole tournée vers le haut » ou « tournée vers le bas ».

Mais la forme même de la courbe proposée aux élèves, et en particulier les contrastes qu'elle met en lumière, peuvent expliquer aussi ce qu'ils relèvent préférentiellement comme caractéristiques. En ce qui concerne la situation du graphique par rapport à l'axe des abscisses, il est significatif que les élèves remarquent qu'une partie de ce celui-ci est située en dessous et s'en étonnent quoi qu'assez brièvement. Par contre, le graphique n'est que croissant, ce qui signifie que le mobile parcourt constamment la trajectoire dans le sens positif. Et ce fait ne soulève pas de commentaires de la part des élèves. Sans doute une courbe croissante sur certains intervalles et décroissante sur d'autres aurait-elle suscité plus de propos relatifs à cet aspect du mouvement. Nous expliquerons plus loin pour quelles raisons une telle courbe n'a pas été proposée. Du point de vue de la variation de la vitesse, la courbe est suffisamment contrastée, traduisant à la fois des moments d'arrêt, des moments d'accélération et d'autres correspondant à une décélération du mobile. Et c'est peut-être ce qui fait que les élèves se sont surtout attachés à cette caractéristique : on voit les choses surtout quand elles changent. Les particularités de la courbe soumise à l'interprétation des élèves sont donc des variables didactiques. Et, comme nous le verrons, c'est le focus mis sur la variation de la vitesse qui « fera milieu » dans la suite des épisodes didactiques.

D'une lecture de la concavité en termes d'accélération ou de décélération au découpage de plus en plus fin du temps

Comme dit plus haut, la vitesse est une grandeur intensive et ne peut donc être mesurée par un nombre. Par contre, on peut en distinguer plusieurs degrés d'intensité. Et c'est bien ce que font les élèves qui parlent d'accélération et de décélération en justifiant leurs affirmations. L'un d'eux évoque un mobile qui « augmente plus vite ses mètres en fonction des secondes » et un autre dit « que la position change à chaque fois plus par rapport au temps ». Les expressions « plus vite » et « à chaque fois plus » indiquent bien l'idée d'un degré d'intensité croissant même si elles sont relatives aux distances : cela revient au même pourvu que le changement soit rapporté au temps, ce qui est effectivement le cas dans ces propos. Le graphique d'une loi de mouvement se prête à une telle lecture. C'est en effet un ostensif qui s'inscrit dans un espace à deux dimensions qu'il met en correspondance : une dimension temporelle et une dimension spatiale. Il convient ici de le contraster avec une représentation déjà rencontrée lors de leçons données par des élèves-professeurs où, sur une seule droite à la fois trajectoire et ligne du temps, on désigne en un même point une position et l'instant auquel cette position est atteinte par le mobile. La séparation entre le spatial et le temporel que réalise la représentation graphique d'une loi de mouvement dans un système d'axes et le caractère continu de ce graphique permettent en effet, si on décode ce dernier correctement, d'évaluer la distance parcourue par un mobile sur n'importe quel intervalle de temps et aussi le temps qu'il met pour aller d'une position quelconque à une autre. C'est ce qui permet surtout de voir une vitesse augmenter (resp. diminuer) selon le sens de la concavité de la courbe : soit en considérant qu'à de mêmes intervalles de temps correspondent des intervalles d'espace de plus en plus grands (resp. petits) ou qu'à de mêmes intervalles d'espace correspondent des intervalles de temps de plus en plus petits (resp. grands). Et ce, si petits soient les intervalles considérés. Ces découpages possibles du temps et de l'espace dont on trouve trace dans les dessins d'élèves et leur mise en correspondance participent ainsi à la prise de conscience de la variabilité de la vitesse. Mais, si cette situation permet aux élèves de travailler cette variation en liaison avec la forme de la courbe - avec ou non des sollicitations du professeur les engageant par exemple au travail numérique -, rien ne permet de conclure qu'ils pensent cette variation comme associée à celle de la pente d'une tangente à cette courbe, fût-ce à un niveau naïf, ou à celle de pente changeante de la courbe. Dans les expérimentations concernées ici, nous avons cependant rencontré quelques élèves qui ont exprimé ce point de vue, surtout mais pas uniquement, dans la classe où le concept de tangente avait été préalablement introduit dans un cadre algébrique en des termes décrits plus haut. Et, en des circonstances semblables, l'un de nous a pu observer des élèves qui, tout en disant que le mobile accélère, longeaient la courbe en maintenant leur main tangentiellement à la celle-ci exprimant, par ce geste, qu'ils associent une droite, ou à tout le moins une pente, en chaque point de la courbe.

Ce n'est pas seulement la variabilité de la vitesse que donnent à voir les découpages associés du temps et de l'espace mais aussi le fait que, sauf là où le mobile est à l'arrêt, sa vitesse change tout le temps, ce qui est lié au fait que sa loi de mouvement est alors représentée par une courbe et non une droite. Cela peut expliquer que les élèves éprouvent d'emblée la nécessité de considérer des durées de plus en plus courtes : « quand on regarde dans des intervalles de temps plus petits […] si on réduit à chaque fois l'intervalle de temps ». Se profile donc, dès cette première situation, la notion de vitesse instantanée, même si c'est dans une sorte de confusion : pour l'un c'est « à chaque moment la vitesse qu'on a », propos qui traduit un principe de continuité déjà observé à propos du problème du vase conique ; pour l'autre, c'est la vitesse « sur un petit intervalle, quoi » bien qu'il faille « vraiment un intervalle de temps hyper hyper précis pour avoir la vitesse instantanée ». Quant à la vitesse moyenne, elle devient, pour un élève, « la moyenne de toutes les vitesses instantanées qu'on a, là », ce qui ne semble pas convaincre ses interlocuteurs qui objectent que « Non, pas vraiment » ou « Il y en a une infinité ». Nous reviendrons plus loin sur les difficultés d'accès au concept de vitesse instantanée à partir de celui de vitesse moyenne ainsi qu'aux ambiguïtés liées au concept d'infinitésimal.

Cette première situation se termine par une institutionnalisation de l'expression algébrique de la vitesse moyenne avec les notations Δt et Δp et de la relation entre la concavité et la croissance ou décroissance des écarts d'ordonnées pour de mêmes écarts d'abscisses.

En définitive, cette première tâche engage les élèves à l'étude globale d'un mouvement sur une durée appréciable, leur regard restant essentiellement qualitatif : il s'agit surtout de savoir si une vitesse augmente ou diminue. Nous allons voir dans la section suivante comment et pourquoi cette première approche peut faire progresser les élèves dans l'identification d'une technique porteuse du concept même de dérivée lorsque leur est dévolue une question à caractère local et portant sur le temps.

3. D'une approche globale des mouvements au travail d'une question locale relative au temps

Comme décrit plus haut, on demande ensuite aux élèves de trouver l'instant où deux mobiles ont la même vitesse. Il s'agit toujours de mouvements rectilignes ; l'un est uniforme et l'autre non. Rappelons que, dans un premier temps, les lois de mouvement sont précisées par un graphique (voir figure 1 supra). Ensuite, on en donne les expressions analytiques, le mouvement non uniforme étant d'abord modélisé par une fonction du second degré et ensuite par une fonction du troisième degré. L'impact de chacune de ces trois phases sera commenté au fur et à mesure de l'analyse.

Un contexte qui favorise la mise en œuvre de stratégies variées

Forts de leur initiation préalable à certains mouvements en physique mais aussi sans doute grâce au premier travail d'interprétation du graphique d'un mouvement, l'ensemble des élèves décodent facilement les nouveaux graphiques fournis, l'un en termes de mouvement rectiligne uniforme, l'autre en termes de mouvement rectiligne accéléré, bien que certains affirment que ce dernier correspond à un mouvement uniformément accéléré :

> C1 : Celle-là [la particule P_1], elle va toujours accélérer, tandis qu'elle [la vitesse de P_2] va être constante …

Probablement en référence à leur expérience scolaire, certains disent spontanément que ce dernier correspond à un mouvement uniformément accéléré alors que rien de tel ne peut être affirmé à ce stade, aucune expression analytique n'ayant encore été précisée.

Le fait que la question porte sur le temps n'échappe pas aux élèves qui utilisent souvent des mots tels que « avant », « après », « quand ». Aucun d'eux n'exprime de doute quant à l'existence et l'unicité d'une réponse, même si ce n'est pas incompatible, comme l'illustre l'échange repris *infra*, avec une certaine perplexité quant à la possibilité de faire mieux que d'approximer celle-ci, ce qui peut s'expliquer, à ce stade, par l'impossibilité d'un travail algébrique :

> C1 : Donc il faut trouver quand c'est le plus près possible…
> […]
> C1 : En fait, il n'y a qu'un seul moment où les deux particules ont la même vitesse. C'est plus ou moins à cet endroit qu'on avait dit, là.

Trois stratégies possibles ont été évoquées dans l'analyse *a priori* : stratégie « des droites parallèles », stratégie « des marches d'escalier » et stratégie « de l'écart maximal ». Les deux premières ont été utilisées spontanément dans toutes les classes que nous avons observées et plus souvent la première que la deuxième. La troisième n'a été évoquée que dans une seule classe. Au total, dans toutes les classes concernées, la plupart des groupes d'élèves sont arrivés à produire quelque chose de pertinent par rapport à cette question. Mais ce n'est pas tant l'occurrence d'apparition de ces stratégies que nous regardons ici mais plutôt ce qui, dans l'une ou l'autre, conduit les élèves à « localiser » la réponse attendue.

Un contraste entre deux mouvements qui permet de localiser graphiquement l'instant cherché

Dans cette section, nous nous intéresserons plus particulièrement à la phase de l'expérimentation où les élèves ne peuvent travailler que dans un registre graphique, les expressions analytiques n'étant pas encore précisées et, qui plus est, les systèmes d'axes n'étant pas complètement gradués. C'est là en effet que nous avons pu observer l'émergence et la justification des idées mises sur le tapis par les élèves, avant que leur explicitation ne passe à l'arrière-plan dans le labeur des calculs ou la gestion de difficultés bien réelles liées à la symbolisation algébrique. Pour mettre en évidence certains aspects de l'analyse, nous épinglerons, d'une stratégie à l'autre, certains propos d'élèves qui permettent de faire une hypothèse sur le fonctionnement de tous ceux qui produisent des actes pertinents sans forcément s'exprimer beaucoup.

Rappelons que les deux mouvements étudiés sont contrastés, l'un étant uniforme et l'autre étant accéléré ce qui se traduit par le caractère tantôt rectiligne tantôt curviligne des graphiques qui représentent leurs lois respectives. Ce contraste est une variable didactique majeure de la situation. A cela s'ajoute l'existence de deux repères phares, les points d'intersection des deux graphiques : les mobiles partent de la même position au même moment et se retrouvent à un autre instant à un même endroit de la trajectoire. Cette caractéristique du problème est sans doute moins essentielle en ce sens qu'elle n'est pas nécessaire à l'expression de plusieurs des raisonnements avancés par les élèves. Elle peut cependant renforcer la première variable didactique en incitant les élèves à comparer les deux mobiles l'un par rapport à l'autre entre ces deux moments-clés que ce soit en termes de positions ou de vitesses relatives et trouver par là une information précieuse par rapport à la question posée. En particulier, on peut s'attendre à ce que le deuxième point d'intersection des deux graphiques donnés aux élèves soit un point « attractif » et que certains d'entre eux proposent l'abscisse de ce point en guise de réponse. Nous avons pu enregistrer un tel événement dans un des groupes filmés et il est intéressant d'observer ce qu'il a pu susciter :

> E1 : Ben moi je dirais : quand ils se croisent.
> Exp : Quand ils se croisent.
> E1 : C'est à… Quand c'est une vitesse instantanée. Enfin, pour ce temps t ici, on voit qu'ils ont la même position.
> Exp : Oui.
> N1 : Et qu'ils sont partis du même point de départ.
> E1 : Oui.
> N1 : Donc, c'est que leur vitesse…
> C1 : C'est que la vitesse moyenne de tout, depuis le départ, est la même. C'est la même vitesse moyenne sur l'intervalle […]. Enfin, en quelque sorte, ils auront la même vitesse moyenne sur un plus petit intervalle de temps quand ça est le même. […] Si on va là, c'est la vitesse moyenne de tout, donc c'est pas très intéressant. En regardant sur un plus petit intervalle de temps, quand ça [il montre, sur le graphique de la figure 8 (ci-après) dessinée par N_1, une contremarche sous le graphique de P_1], la différence de position sur l'intervalle de temps, est la même entre les deux [il pointe alors l'autre graphique], ça veut dire que la vitesse moyenne pour

le petit intervalle de temps est la même. Donc il faut trouver quand c'est le plus près possible […]. En fait, il n'y a qu'un seul moment où les deux particules ont la même vitesse. C'est plus ou moins à cet endroit qu'on avait dit, là. Celle-là [la particule P_1], elle va toujours accélérer, tandis qu'elle [la vitesse de P_2] va être constante. Donc, là ce sera égal.

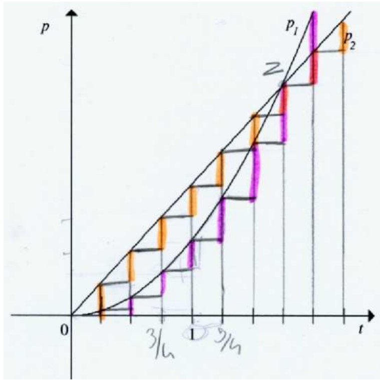


Figure 8.

N1 : Ce sera plus ou moins ici.
E1 : C'est très vague, c'est pas très précis.
N1 : Ce sera aux environs de 1, quoi.
E1 : Oui. Et pour ça, il faudrait prendre des intervalles de temps encore plus petits.
Exp : Voilà. Et plus je vais prendre un intervalle de temps plus petit…
N1 : … au plus on se rapprochera de…

Comme on le voit sur cet extrait, une première réponse prend appui sur le fait que les deux graphiques se coupent en deux points : entre ces instants, les deux mobiles ont parcouru le même espace et c'est ce qui conduit à produire une réponse fausse en référence sans doute à une première approche de la vitesse vue en physique comme rapport entre espace parcouru et temps mis pour le parcourir. Mais cette réponse ne résiste pas à l'analyse collective et on voit les élèves distinguer très vite la vitesse instantanée de la « vitesse moyenne de tout, depuis le départ » laquelle est jugée inadaptée à la question : « donc c'est pas très intéressant ». Un lien est alors fait avec le dessin réalisé par N1 qui a découpé le temps et l'espace en intervalles plus petits et dessiné des marches et contremarches. Cela fait apparaître l'intérêt de considérer des intervalles de temps plus petits et même « encore plus petits ». On peut imaginer ici que c'est la comparaison des graphiques respectivement rectiligne et curviligne entre leurs deux points d'intersection qui mène à un tel cheminement. Comme le dit C1, « Celle-là [la particule P_1], elle va toujours accélérer, tandis qu'elle [la vitesse de P_2] va être constante ». Dès lors, si ces deux mobiles ont bien une même vitesse moyenne sur l'intervalle de temps correspondant, la différence de leurs comportements n'autorise aucune réponse à la question posée, avant d'avoir étudié ce qui se passe sur de plus petits laps de temps. Dans cet échange, l'élève C1 joue le rôle de leader, se montre plus explicite que les autres et semble les convaincre. Leur cheminement collectif, ici reconstitué par nous, est cependant crédible dans la mesure où, *a priori* en tout cas, le travail fait à propos de la première situation a enrichi le milieu en ce sens.

L'échange précédent illustre ce que nous avons appelé, dans l'analyse *a priori*, la stratégie des marches d'escalier. Les élèves y comparent des taux de variation de deux fonctions ou plutôt, ce qui revient au même, des écarts d'ordonnées correspondants à de même écarts d'abscisses. Il est toutefois plus facile de comparer deux tels taux entre deux points d'intersection des graphiques, comme au tout début de cet échange. Cela pourrait expliquer que d'autres élèves optent pour la stratégie des droites parallèles ou du moins une de ses variantes consistant à tracer plusieurs droites parallèles au graphique de P_2 et coupant le graphique de P_1 en deux points. L'idée est de remplacer le mobile à mouvement uniforme par un autre de même vitesse constante mais qui va rencontrer le mobile à mouvement accéléré entre deux instants plus proches. C'est ce qu'explique un élève en s'aidant d'un dessin assez sommaire :

> « La droite P_2 a une vitesse constante car pour un certain temps, un certain espace est parcouru et, plus loin, pour un même temps, un même espace est parcouru. Si on trace une parallèle à cette droite, cette parallèle a la même vitesse (même pente) ; c'est juste que la particule est partie plus tôt ou plus tard. Toutes les particules qui coupent la courbe en deux points, entre ces deux points ont la même vitesse moyenne. Si elle coupe la courbe en un point, c'est la même vitesse à cet instant. CQFD ».

En somme, il s'agit de reproduire une figure semblable à la figure 9 en rapprochant les intersections des deux lois de position de sorte que la réponse soit encadrée plus finement.

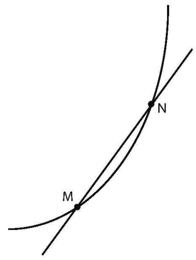


Figure 9.

On peut voir là, en actes mais aussi en mots, une ébauche cinématique du théorème des accroissements finis. L'élève assimile une droite coupant la courbe en deux points à un mouvement à vitesse constante et cherche le point de la courbe où existe une « parallèle de même vitesse (même pente) » qui la rencontre en seul point. Bien sûr le propos ne déclare pas explicitement l'existence d'un tel point et c'est le tracé de la tangente qui fait foi ; en outre, le concept de dérivée n'est pas encore défini, ni celui de tangente. Mais l'expression « droite de même vitesse » qui sera reprise par un autre élève lors de la synthèse autorise une traduction de l'égalité entre une vitesse moyenne et une vitesse instantanée en une égalité entre pente de sécante et pente de tangente.

Un autre regard consiste, comme nous l'avons décrit dans l'analyse *a priori*, à imaginer le parcours d'une droite tangentiellement à la courbe. On arrive alors à la même solution graphique laquelle peut être étayée, à ce stade, en coordonnant deux arguments qui peuvent faire écho aux intuitions des élèves et qui ne requièrent qu'une comparaison qualitative de vitesses, outillée graphiquement comme à l'occasion de la première situation, mais portant ici non pas sur l'évolution d'un seul mobile mais bien sur la comparaison de deux mouvements. Le premier argument est le pendant du théorème des valeurs intermédiaires pour la grandeur « vitesse » : un mobile qui accélère passe par tous les degrés de vitesse. Le second est que le mobile dont le mouvement accéléré est représenté par la courbe possède une vitesse inférieure à celle du mobile qui évolue à vitesse constante au premier moment de rencontre des deux lois de position et une vitesse supérieure au second moment. Au total, il a donc même vitesse que l'autre entre ces deux instants. La première de ces deux intuitions expliquerait qu'aucun élève ne doute de l'existence d'une réponse à la question posée, ainsi que nous l'avons dit plus haut. Quant à la seconde, elle peut s'appuyer sur une certaine relation entre vitesse (instantanée) et pente de la courbe ou pente de la tangente à la courbe. Un élève l'exprime en ces derniers termes tout en dessinant un faisceau de tangentes à la courbe de P_1 :

> « Les particules ont la même vitesse en "A" car, avant ce point, les pentes tracées par les tangentes de cette courbe sont moins grandes que P_2. Au moment "A", la tangente trace une pente parallèle à P_2, donc une pente qui parcourt pour un même laps de temps une même vitesse. Et, après ce moment, les pentes tracées par les tangentes de la courbe sont plus grandes que P_2 ».

On remarque bien dans ce propos la traduction de la comparaison qualitative des vitesses en termes de comparaison qualitative de pentes, ainsi que la référence à un « avant ce point », un « après ce moment » que sépare, dans le discours, un « au moment ». D'autres élèves repèrent l'instant correspondant au point de la courbe où la tangente tracée à vue est parallèle à la droite modélisant le mouvement de P_2. Ils établissent alors plus abruptement un lien entre égalité de vitesses et égalité de pentes en n'hésitant pas à parler de « graphes parallèles » et de « pente des courbes » :

> « Quand les deux graphes sont parallèles, les deux particules ont aussi la même vitesse, car la pente des courbes est la même ».

ou encore de « taux d'accroissement de la courbe » et de « lignes parallèles » à propos de l'instant où le mobile à mouvement accéléré a même vitesse (instantanée) que l'autre :

> « Puisque la vitesse (moyenne) correspond au rapport entre la différence de position et la différence de temps, c'est-à-dire à la pente de la droite, les vitesses sont identiques lorsque ces rapports sont égaux, c'est-à-dire lorsque le taux d'accroissement de la courbe vaut la pente de la droite. Graphiquement, grâce à la propriété énoncée ci-dessous, c'est lorsque ces deux lignes sont parallèles.
>
> « Propriété : Lorsque deux droites ont la même pente, elles sont parallèles.
>
> « Les deux graphes sont parallèles approximativement après 10/12 de temps. »

On voit donc apparaître ici, dans les propos des élèves, les trois variantes de la stratégie des droites parallèles décrites dans l'analyse *a priori* et, dans nos commentaires, les jeux de langage qu'ils s'autorisent et que le professeur pourrait leur emprunter pour construire un discours technologique.

Quant à la stratégie de l'écart maximal, nous l'avons très peu rencontrée dans les classes où se sont déroulées nos expérimentations. Contentons-nous de regarder en quels termes un élève l'exprime :

> « En fait, moi, j'ai écrit que, avant le temps t_0 où la vitesse est égale, on voit que la distance grandit entre P_2 et P_1 ; donc, quand on calcule [mais l'élève ne calcule rien], qu'on fait la différence des distances, c'est de plus en plus grand, P_2 est de plus en plus loin ; et, après le temps t_0 , ça re-diminue jusqu'au point d'intersection, et puis ça ré-augmente, mais alors c'est P_1 qui le dépasse. Donc ça veut dire que, au départ, P_2 franchit une plus grande distance que P_1 dans le même temps et, après ça, c'est le contraire, donc ça veut dire qu'au temps t_0, c'est égal ».

L'élève parle ici de « la différence des distances, c'est de plus en plus grand […] ça re-diminue […] ça ré-augmente » qu'il traduit en termes de mobile de « plus en plus loin de l'autre » puis en termes de dépassement. L'un des deux mobiles évoluant à vitesse constante, il sait par là comment varie la vitesse de l'autre par rapport à celle-là. On observe donc là une étude qualitative non pas des vitesses comme précédemment mais des positions respectives des mobiles, cette étude étant, elle aussi, qualitative et prenant en compte un avant et un après l'instant cherché.

Résumons, pour conclure cette section, ce qu'apportent les deux variables didactiques majeures du problème étudié ici : d'une part, le fait que la question posée porte sur le temps et non sur la vitesse ; d'autre part, le fait qu'il ne s'agit pas du temps auquel un mobile possède une vitesse donnée mais bien du temps auquel un mouvement uniforme et un mouvement accéléré se déroulent à même vitesse. Les lois de mouvement sont précisées par des graphiques dont le caractère rectiligne ou curviligne indique le type de mouvement auquel on a affaire. Voici, d'une stratégie à l'autre, l'impact potentiel de telles caractéristiques. Tout d'abord, le concept de vitesse moyenne y est, une fois engagé par les élèves, perçu comme inopérant pour traiter un mouvement à vitesse variable. Cette variabilité découle, elle, d'une interprétation du caractère curviligne de la loi de mouvement. Elle peut induire un découpage du temps en intervalles plus petits sur lesquels les vitesses moyennes changent et/ou peut être associée à la variabilité de la pente de la courbe (ou de celles de ses tangentes). Cette variabilité est contrastée avec ce qui se passe pour le mouvement uniforme modélisé par une droite. Dans un des cas, le décodage graphique pousse à affiner davantage le découpage du temps et, dans l'autre cas, il permet de distinguer deux périodes : celle où l'un des deux mobiles possède une vitesse plus petite que l'autre et celle où c'est le contraire ; l'instant qui les sépare est alors identifié comme celui où les mobiles ont même vitesse. Se jouent donc ici des intuitions liées à des aspects qualitatifs et à la continuité implicite des grandeurs physiques en jeu : temps, vitesse auxquelles il faut prêter la propriété des valeurs intermédiaires pour se convaincre de l'existence de la solution. Ce premier type de continuité se traduit par une continuité graphique des lois de mouvements sur laquelle reposent certaines des stratégies graphiques engagées ici.

Cette partie de l'expérimentation illustre donc la possibilité d'épurer l'objet mental de vitesse chez les élèves en les faisant travailler sur des graphiques, ainsi que l'avait déjà montré le travail de Janvier (1978), à un autre niveau et à partir de dispositifs différents.

4. D'une question locale à une réponse mobilisant la « formule-vitesse »

Comme précisé plus haut, le travail graphique se poursuit par un travail analytique et, dans un premier temps, le mouvement accéléré est traduit par la loi $p_1(t) = t^2$: il est donc alors uniformément accéléré. Nous ne parlerons pas ici des solutions algébriques dont il est fait mention plus haut et des difficultés qu'elles soulèvent pour nous polariser sur les démarches de type « infinitésimal », leur disponibilité et les difficultés qu'elles suscitent. Une résolution de ce type est le plus souvent liée à la stratégie des marches d'escalier mais on pourrait imaginer qu'elle traduise une variante de celle des droites parallèles qui consiste à réduire l'intervalle contenant l'instant cherché en considérant des droites parallèles à $P_2(t)$ dont les points d'intersection à $P_1(t)$ sont de plus en plus proches. Nous verrons comment ce travail conduit les élèves à formuler et à mobiliser une fonction-vitesse même si le statut fonctionnel de la formule construite ne sera explicite qu'ultérieurement.

Des limites du travail numérique à l'identification d'un calcul algébrique nouveau et sujet à caution

Revenons au groupe dont nous avons rapporté les échanges au début de la section 3 ci-dessus. Après avoir « découpé » les deux mouvements en escaliers et tenté de voir sur quel intervalle de temps les vitesses moyennes ou les contremarches respectives étaient plus ou moins les mêmes, ces élèves en arrivent à la conclusion : « C'est très vague, c'est pas très précis ». Et cette conclusion est bien légitime vu que les données rendent difficile l'accès à la solution par ce biais, du moins sur un mode graphique. Disposant ensuite des expressions analytiques, ils poursuivent par des calculs numériques traduisant leur objectif affiché de « prendre des intervalles de temps encore plus petits ». Ils calculent ainsi les vitesses moyennes sur des intervalles de temps proches de $t = 1$: de $t = 3/4$ à $t = 1$ et de $t = 1$ à $t = 5/4$ dans l'espoir de trouver un intervalle de temps sur lequel les vitesses moyennes sont égales.

> E1 : Donc là on a toutes les positions ; on cherche les vitesses ; et on compare, en gros.

Et, comme ils ne trouvent pas, ils poursuivent avec un découpage plus fin encore pour finir par mettre en doute la possibilité d'y arriver :

> N1 : C'est un peu long, quoi.
> Exp : C'est un peu long…
> C1 : Ce ne sera jamais tout à fait précis.
> E1 : On n'arrivera jamais.

Le passage au registre algébrique est alors envisagé suite à une relance du professeur somme toute assez banale :

> Exp : Essayez de vous souvenir… Qu'est-ce qu'on cherche ?
> M1 : Une égalité…
> Exp : Une égalité.
> M1 : On pourrait faire une équation…
> E1 : Oui. On saurait les mettre dans la même équation.
> […]
> E1 : Il faudrait faire avec les équations des vitesses.

Mais cela suppose, dans le groupe, un certain cheminement

> E1 : On doit prendre un t bien précis ou bien on met dans l'équation avec un t… ?
> N1 : Non, on doit faire en fonction… En général quoi.
> […]
> Exp : Alors est-ce qu'il faut le faire à un temps *t* précis, ou il faut prendre à un temps t quelconque… ce calcul de $\Delta p/\Delta t$?
> […]
> N1 : Il faut, il faut prendre un temps, mais euh, enfin pas numérique.
> Exp : Alors, pourquoi ? Quel est l'intérêt de prendre un temps pas numérique, comme tu dis, c'est-à-dire la lettre t pour garder un temps quelconque ? […]
> E1 : Parce qu'on ne sait pas quand c'est.
> Exp : Parce qu'on ne sait pas quand c'est. Et donc, quand on ne sait pas quand c'est… Qu'est-ce que vous avez voulu résoudre tout à l'heure ?
> M1 : Une égalité.
> Exp : Une égalité. Une équation, même, tu as dit tout à l'heure, M1. Donc, quand tu as une équation, qu'est-ce que ça sous-entend quand tu as une équation ?
> N1 et M1 : Des inconnues.
> Exp : Au moins une inconnue. Et quelle est cette inconnue ici ?
> M1 et N1 : t.

Quant à l'écriture algébrique de la vitesse moyenne, elle n'est pas immédiate, les élèves hésitant entre les formules *p*/*t* et Δ*p*/Δ*t*. Le professeur réexplique ce qui les différencie mais le groupe opte, en définitive, pour une autre écriture où les extrémités de l'intervalle contenant la solution sont notées t_1 et t_2 :

> M1 : Tu n'as qu'à dire que t c'est juste entre t_1 et t_2. On n'est pas obligé de donner des chiffres

et où la vitesse moyenne s'écrit $({t_2}^2 - {t_1}^2)/(t_2 - t_1)$ ou, sous forme simplifiée, $t_2 + t_1$.

S'ensuivent l'écriture d'une équation à deux inconnues $t_2 + t_1 = \sqrt{3}$, l'expression du malaise qu'elle suscite et l'égalisation de t_2 et t_1.

> M1 : Donc $t_2 = \sqrt{3} - t_1$.
> E1 : Donc… Oui, et $t_1 = \sqrt{3} - t_2$.
> M1 : Oui. Et ça nous fait quoi ?
> E1 : Et ça, et ça… Oui, c'est ça, c'est ça le problème : une fois qu'on a ça, on n'a toujours pas l'instant t.
> N1 : Mais il faudrait trouver une autre façon… Enfin… encore un autre truc où tu as $t_2 + t_1$ et alors on saurait obtenir un système. Tu vois ce que je veux dire ? S'il y a deux inconnues, il faudrait trouver une autre

manière…
E1 : Oui, mais qu'est-ce que tu aurais d'autre comme équation à part ça ?
N1 : Et si… À quel moment… On ne devrait pas juste prendre un seul t et dire : c'est une vitesse instantanée ? On pourrait prendre juste un t vu que c'est un seul moment.
M1 : Oui, mais, limite, ils sont tellement proches, qu'on peut dire que $t_1 = t_2$.
N1 : Oui, c'est ça, en fait.
M1 : Oui.

La solution est alors très vite trouvée en résolvant l'équation $2t = \sqrt{3}$.
Ces élèves justifient ensuite leur démarche à l'adresse des autres élèves du groupe et à celle du professeur dont ils cherchent l'aval.

M1 : Parce qu'en fait, ils sont tellement proches… Tu mets t_2 égale plus ou moins t_1. Et donc, tu n'as qu'à dire : $2t_1 = \sqrt{3}$. Donc $2t_1 = \sqrt{3}/2$.
E1 : Ça paraît bizarre d'égaliser t_2 et t_1.
C1 : C'est un peu fac[ile]… Ça ne met pas vraiment en commun les deux équations.
Prof : En fait, vous avez fait… Vous avez rendu votre différence de temps…
E1 [qui coupe Prof et continue la phrase de Prof] : … tellement petite que t_2 est égal à t_1…
N1 : Infiniment petite.
E1 : Enfin, presque égal […]. Enfin, égal, en fait.
Prof : Vous l'avez fait explicitement égal.
E1 : Oui, oui.
Prof : Donc le Δt …
E1 : Mais ce n'est pas imprécis, à ce moment-là ?
N1 : Ben non : c'est logique. Si tu réduis à fond l'intervalle de temps, ça deviendra égal.
Prof : Oui, oui.
E1 : Donc c'est juste…
Prof : Ah mais, oui, oui, c'est bien.
E1 : Ah, c'est cool.

D'autres groupes font appel à la stratégie des marches d'escalier en utilisant les notations t et Δt. Ainsi peut-on observer des élèves égaler ce qu'ils appellent la « pente des escaliers », pour chacune des particules, pentes respectives qu'ils notent $P_1(t)$ et $P_2(t)$, tout en précisant qu'il s'agit de vitesses moyennes. Mais, bien vite, ils passent aux vitesses instantanées en écrivant que les particules « ont la même vitesse instantanée lorsque $P_1(t) = P_2(t) \Leftrightarrow 2t + \Delta t = \sqrt{3}$ », ce qui les engage à mobiliser, sans aucune justification, le concept de limite : « $\lim_{\Delta t \to 0}(2t + \Delta t) = 2t$ » et à conclure que $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ces observations appellent plusieurs commentaires.

Tout d'abord, rappelons que l'inconnue est un instant, celui auquel les deux mobiles ont même vitesse. Et que cet instant peut être encadré de manières diverses que nous avons décrites dans l'analyse *a priori*. Les élèves filmés ici le font en cherchant à déterminer l'intervalle de temps sur lequel les deux mobiles ont même vitesse moyenne. Ils ne justifient pas explicitement le bien-fondé de leur démarche mais on peut imaginer que l'étude qualitative réalisée précédemment à partir des seuls graphiques de positions en donne la clé telle que formulée, en substance, par d'autres élèves que nous avons pu observer aux prises avec des questions analogues. Supposons que le mobile P_1 ait une vitesse moyenne égale à $\sqrt{3}$ entre t_1 et t_2. Il ne peut posséder une telle vitesse déjà en t_1 sinon, vu qu'il accélère constamment, il aurait, sur ce laps de temps, une vitesse sans cesse supérieure à $\sqrt{3}$ et donc une vitesse moyenne elle-même supérieure. Pour des raisons analogues, on ne peut supposer qu'il atteigne une telle vitesse seulement en t_2. Il l'atteint donc entre t_1 et t_2. Cela étant, une investigation numérique ne permet pas de trouver un tel intervalle, si fin soit le découpage, d'autant que la valeur irrationnelle de la vitesse constante du mobile P_1 ne facilite pas les choses. Quant à la stratégie même des marches d'escaliers, elle n'offre guère de précision et rend de ce fait l'investigation graphique particulièrement malaisée. L'algébrisation devient alors nécessaire qu'elle soit de l'initiative des élèves ou obtenue à l'invite d'un professeur souvent demandeur, au nom du contrat classique, d'une forme ou l'autre de généralisation. Ici, l'évolution des élèves est spontanée et ils passent de l'idée « d'égalité » à celle « d'équation ». Mais le mot équation semble polyvalent : E1 parle d'abord de les mettre dans une même équation - et le contexte laisse supposer que « les » renvoie aux vitesses qui sont égales - et utilise ensuite l'expression « équations de vitesses », ce qui fait plutôt penser à des formules (fonctions-vitesses) qu'il a normalement déjà rencontrées en physique lors de l'étude de mouvements rectilignes. Un peu plus loin, le même élève hésitera à « prendre un t bien précis » ou à « [mettre] dans l'équation avec un t » ce qui indique qu'il se situe sans doute difficilement entre l'univers des fonctions et de leurs images, d'une part, et celui des équations comportant des inconnues d'autre part.

Le choix de l'inconnue, quant à lui, est problématique. Comme le montre l'échange supra, les élèves sont conscients qu'équation va de pair avec inconnue et que l'inconnue renvoie ici au temps. Mais leur démarche s'accommode mal d'une seule inconnue. Ils veulent situer l'instant cherché dans un intervalle où les deux mobiles ont même vitesse moyenne tout en voulant réduire cet intervalle au maximum parce qu'ils savent qu'un des deux mobiles change constamment de vitesse. Or, travailler avec la seule lettre t pour représenter le temps et fixer numériquement la durée de cet intervalle n'autorise qu'une approximation. Reste donc à algébriser non seulement le temps mais aussi son incrément, sous forme de Δt par exemple, ou encore, comme le font les élèves de ce groupe, à représenter les extrémités de l'intervalle par des symboles différents, ici t_1 et t_2. Ce choix leur permet de simplifier leur équation sous la forme $t_1 + t_2 = \sqrt{3}$ mais les accule dans une impasse : comment déterminer deux inconnues à partir d'une seule équation, impasse que l'un d'eux exprime par la nécessité de trouver un système sans savoir quelle nouvelle équation ajouter. C'est de là que naît sans doute l'idée d'assimiler t_1 et t_2, soit en évoquant qu'« On ne devrait pas juste prendre un seul *t* et dire : c'est une vitesse instantanée […] », soit en pensant qu'on cherche l'intervalle le plus petit possible : « Oui, mais, limite, ils sont tellement proches qu'on peut dire que $t_1 = t_2$ ». On notera, dans ce dernier propos, la présence du mot « limite » sans qu'on puisse dire s'il est signe d'une quelconque réminiscence chez l'élève du calcul de limites de fonctions ou s'il s'agit d'un des très nombreux usages communs de ce mot qui renvoient à l'idée de borne, à celle d'extrême, ou d'infranchissable, voire d'inconvenant… Quoiqu'il en soit, les élèves identifient là un calcul algébrique nouveau pour eux lequel consiste à égaler, dans une équation, deux inconnues *a priori* distinctes. Comme dit plus haut, d'autres groupes d'élèves ont opté, peut-être en référence aux cours précédents, pour un autre système de notations en désignant l'intervalle de temps sous la forme $[t\,;\,t + \Delta t]$[4]. Le calcul nouveau consiste alors à supprimer Δt dans l'expression de la vitesse moyenne : $2t + \Delta t$ pour finir par résoudre l'équation $2t = \sqrt{3}$, calcul que nous avons vu proposer par l'un ou l'autre élève. Dans les deux cas, nous avons affaire à un « passage à la limite » qui, loin d'une définition formalisée du concept homonyme, prend l'allure d'une procédure de calcul littéral : égaler t_1 à t_2 ou égaler Δt à 0 ; procédure que susciteraient, d'une part, l'impossibilité de résoudre une seule équation par rapport à deux inconnues et, d'autre part, la nécessité éprouvée tant physiquement que graphiquement, de travailler sur des intervalles de temps « les plus petits possible ». On retrouve là un déroulement analogue à celui observé à propos du problème du vase conique et, à l'instar de Schneider (1988), on peut souligner le rôle joué ici par le registre algébrique dans l'identification d'un calcul de limite, les seuls tableaux numériques ne permettant rien de tel, même pas de conjecturer une quelconque limite si ce n'est en la devinant par effet de contrat dans des cas choisis délibérément « simples » par le professeur. Bien sûr, nous avons là une forme embryonnaire du savoir en jeu, la « limite » étant le résultat de la mise en œuvre d'une technique et non pas un concept donnant prise à la validation de théorèmes plus généraux tels ceux relatifs à l'algèbre des limites. Cela qui est bien le signe qu'on est ici dans une praxéologie « modélisation » qui sera le prélude de la praxéologie « déduction » que constitue l'analyse mathématique. Soulignons que c'est encore le point de vue de Lagrange (1736-1813) qui définit la dérivée comme « limite » du taux d'accroissement $P = [f(x+i) - f(x)]/i$, cette limite étant pensée comme le résultat d'un acte qui consiste à annuler i, la référence à l'action étant particulièrement bien rendue par l'utilisation du verbe « faire » :

> « Or, P étant une nouvelle fonction de x et i, on pourra de même en séparer ce qui est indépendant de i et qui, par conséquent, ne s'évanouit pas lorsque i devient nul. Soit donc p ce que devient P lorsqu'on FAIT $i = 0$. »

Mais cet acte de passage à la limite est lui-même considéré, par les élèves, comme ayant un caractère suspect : « Ça paraît bizarre d'égaliser t_1 et t_2 » dit l'un d'eux. Et d'évoquer alors la nécessité ou du moins l'intérêt de considérer une différence de temps « tellement petite que t_1 est égal à t_2… » ou

[4] Nous n'analyserons guère ici les raisons qui peuvent pousser les élèves à choisir un système de notations plutôt qu'un autre, si ce n'est, qu'avec les notations t_1 et t_2, aucune extrémité de l'intervalle de temps n'est privilégiée par rapport à l'autre et que les deux ont des rôles parfaitement symétriques.

« infiniment petite » ou encore d'hésiter entre le « Enfin, presque égal » ou le « Enfin, égal, en fait ». Cette valse-hésitation n'est pas sans rappeler les débats, dans l'histoire des mathématiques, sur le double statut de ce qu'on appelait jadis l'infinitésimal, d'abord non nul puisqu'on le prend comme diviseur à un moment donné du calcul, puis rendu nul au terme du développement. Rappelons de quoi il s'agit à travers la procédure par laquelle Fermat montre que, de tous les rectangles isopérimétriques, c'est le carré qui a l'aire la plus grande. Il représente le demi-périmètre par un segment de longueur b qu'il partage en deux segments de longueurs respectives a et $b-a$. Après avoir ajouté à a une quantité e et diminué d'autant $b-a$, il « adégale » les produits $a(b-a)$ et $(a+e)(b-a-e)$, adégalité qu'il traite ensuite comme une égalité algébrique pour finir par « supprimer » e :

$$a(b-a) \approx (a+e)(b-a-e)$$
$$be \approx 2ae + e^2 \text{ (diviser par } e\text{)}$$
$$b \approx 2a + e \text{ (supprimer } e\text{)}$$
$$b = 2a.$$

C'est là, d'après Grabiner (1983), une première ébauche du calcul de dérivées bien que, contrairement à ce que fait Lagrange, on n'y voit pas apparaître l'écriture à proprement parler du taux de variation. Cependant, la quantité e bénéficie d'un double statut : non nul puisqu'on divise par e à un moment donné du calcul, puis rendu nul au terme du développement. Dans l'expérimentation liée au vase conique, Schneider (1988, 1992) avait observé des élèves s'étonner explicitement de cette incohérence algébrique. D'une part, lorsqu'on calcule le débit moyen, on divise par Δt, ce qui laisse supposer que Δt n'est pas nul puisque « l'on ne peut pas diviser par 0 » et, d'autre part, on supprime Δt en fin de parcours sans jeu de compensation algébrique ce qui rend l'égalité caduque sauf si Δt égale 0. Les élèves interrogés dans le cadre de cette expérimentation n'ont pas vraiment été explicites sur ce point, du moins pas avant que l'expérimentateur n'en ait parlé de lui-même. Mais ils ont cependant soulevé le caractère « bizarre » du calcul fait à de nombreuses reprises que ce soit dans l'échange repris plus haut ou après, lorsque $p_2(t)$ sera modélisé par la fonction t^3 : « Oui. Mais ça fait bizarre parce qu'il y a deux endroits où il y a des Δt, et les deux endroits, on les baque[5], quoi ; donc ça fait un truc bizarre ». Et plusieurs ont lié cette audace à une quelconque imprécision de la réponse trouvée : « Mais ce n'est pas imprécis à ce moment-là ? ».

A propos du vase conique, Schneider (1988, 1992) avait également rendu compte de propos d'élèves liant le caractère approximatif d'une procédure basée sur l'annulation de Δt à l'impossibilité physique de mesurer avec exactitude un quelconque volume versé en un temps nul et les avait interprétés, comme dit plus haut, par l'obstacle positiviste des mathématiques et donc par un attachement excessif à l'expérience sensible. Rien de si explicite dans les enregistrements effectués lors de notre expérimentation, même si l'on ne peut exclure que de telles raisons soient en toile de fond de certaines des hésitations des élèves. D'autant que, lors de la résolution graphique, certains avaient éprouvé des difficultés à concevoir la vitesse instantanée comme la vitesse que l'on a à chaque moment en ajoutant « sur un petit intervalle quoi ». Il faut ici préciser que l'expérimentateur avait lui-même anticipé les objections possibles, coupant ainsi l'herbe sous les pieds des élèves. Mais, surtout, il convient d'évoquer deux différences avec le problème du vase conique. D'une part, les mouvements étudiés ici le sont à travers des fonctions, donc des représentations mathématiques plus construites, sans référence aucune à un dispositif expérimental plus brut, fût-il de l'ordre de l'expérience mentale comme dans le cas du vase conique. D'autre part, l'annulation de Δt correspond à l'intuition graphique, exprimée à plusieurs reprises ici, que la solution peut être située dans un intervalle de temps aussi petit que possible.

En revanche, on trouve trace dans nos expérimentations de difficultés dont on peut supposer, d'après l'analyse de Schneider (1988, 1992), qu'elles sont à l'origine de celles évoquées ci-dessus. En particulier, plusieurs marqueurs langagiers montrent le souci des élèves de trouver un sens au traitement fait à Δt ainsi que le malaise à ne pas en trouver un et font apparaître qu'une certaine notion d'infinitésimal prime, dans leur tête, sur le concept de limite de fonction. Dans l'analyse standard, ce dernier exprime, dans un langage formalisé ou plus proche du langage courant, ce que veut dire : « la limite de la fonction f égale b lorsque la variable x tend vers a » mais ne permet en aucun cas de donner sens, de manière dissociée, ni à l'expression « $f(x)$ tend vers b », ni à l'expression « x tend vers a ». La définition de la limite est en effet contravariante et subordonne ainsi le comportement de Δt ou celui de Δp à la progression de leur rapport. Ici, au contraire, les élèves se polarisent, dès la résolution graphique, sur ce fameux Δt dont ils parlent avec hésitation et circonspection comme d'une « différence de temps tellement petite que $t_1 = t_2$

[5] Le verbe « baquer », dans le langage des élèves, signifie « mettre au bac » et, par extension, « jeter » ou « supprimer »

(ou $\Delta t = 0$) » ou « infiniment petite » ou un intervalle de temps « qu'on réduit à fond ». Mais vouloir donner un sens à « Δt tend vers 0 » de manière autonome, dans une perspective covariante de la limite, conduit à une impasse : le temps étant une grandeur continue par excellence, Δt ne peut « tendre vers 0 » sans le devenir. De même en est-il de Δp. En rendant nulles ces deux grandeurs avant même de lier leur comportement à celui de leur rapport, comme on le ferait en considérant la limite de la fonction « taux d'accroissement », on est acculé à devoir considérer le quotient $0/0$ qu'on éprouve beaucoup de peine à interpréter physiquement puisque rien ne se passe en un temps nul. C'est là l'impasse du $0/0$, identifiée par les historiens comme un « nœud » dans le développement du calcul infinitésimal (cf. Boyer 1949).

Cette section a permis de mettre à jour quelques avatars d'une genèse scolaire de la dérivée qu'enclenchent les variables didactiques d'une situation donnée. En l'occurrence, la recherche du moment où deux mobiles ont la même vitesse sur un intervalle où l'un évolue à vitesse constante tandis que l'autre accélère conduit à situer l'inconnue dans des intervalles de plus en plus petits. La difficulté éprouvée à le faire graphiquement ou numériquement pousse à algébriser non seulement le temps mais aussi la durée de l'intervalle. Des considérations physiques (il existe un seul instant où les deux vitesses sont égales) et algébriques (une seule équation ne suffit pas pour déterminer deux inconnues) donnent alors l'idée de rendre nul l'incrément de temps. Il en découle une forme algébrisée de la dérivée (ici $2t$ à partir de t^2) qui permet de trouver le temps cherché comme racine d'une équation du premier degré même si cette forme n'a pas encore le statut de fonction comme nous l'analyserons plus loin.

Évidemment, cette démarche est collective et suppose, à plusieurs reprises, une aide du professeur, en particulier pour exprimer correctement l'image de la somme $t + \Delta t$ par une fonction quadratique. Ce calcul est évidemment très lourd en regard de ceux auxquels conduisent respectivement la stratégie des droites parallèles ou celle de l'écart maximum. Qui plus est, il possède un caractère douteux transgressant les règles habituelles du calcul algébrique selon lesquelles toute simplification appelle un jeu de compensation. Il convient donc non seulement de le valider mais aussi de faire apparaître que son champ d'opérationnalité dépasse le seul problème rencontré ici. C'est l'objet de la section suivante.

Validation pragmatique de ce nouveau calcul et extension de son champ d'application

Malgré les réserves avancées par les élèves sur la légitimité du nouveau calcul identifié, aucun n'exprime de doute quant à l'exactitude de la réponse qu'il permet de donner à la question posée. Et pourtant, la suppression d'un terme dans une somme, sans jeu de compensations, induit fortement la conviction de commettre une erreur, fût-elle négligeable, et donc celle d'approcher seulement ce qui est cherché : on peut observer en tout cas, dans l'histoire des mathématiques ainsi que dans des réactions d'élèves (Schneider, 1988), que de tels arguments sont avancés, aussi bien que des considérations empiristes, pour dénier à un tel calcul le pouvoir de déterminer exactement une vitesse ou un débit instantanés. Cependant, ne l'oublions pas, il s'agit ici de déterminer un instant, celui où deux mobiles ont même vitesse et, qui plus est, après avoir acquis la conviction que cet instant est unique et l'avoir situé dans un intervalle codé algébriquement sous la forme $[t\,; t + \Delta t]$ (ou $[t_1\,; t_2]$) : il peut dès lors sembler normal de cerner l'instant cherché en « réduisant [cet intervalle] à fond », comme le dit un élève, par annulation de Δt ou assimilation de t_1 à t_2.

Quoiqu'il en soit, la plausibilité du résultat trouvé peut être testée sur le dessin, trois solutions graphiques ayant été institutionnalisées à l'issue du travail précédent. Et c'est bien sur cette base que les élèves mettent à l'épreuve, dans un premier temps, le résultat de leur investigation :

> M1 : Ça doit faire un virgule… Normalement, ça doit être plus petit que 1, parce que… C'est censé être plus petit que 1. Oui, ben…
> […]
> E1 : En même temps, c'est vrai que sur le, sur le graphique, ça paraît logique comme chiffre, ou pas ?
> M1 : Moi, je dis : c'est bon.
> C1 : Oui, ça doit être bon.
> E1 : Ça parait logique, quoi.
> N1 : Oui. Moi aussi, ça me parait bon.
> M1 : Voilà.

Mais surtout, comme annoncé dans l'analyse *a priori*, la réponse obtenue par ce calcul est la même que celle fournie par les deux autres stratégies qui non seulement s'appuient sur des intuitions physiques traduites graphiquement mais mobilisent aussi des techniques jouissant d'une certaine crédibilité à ce niveau de la scolarité : exprimer l'unicité de la solution d'un système ou maximiser une fonction du second degré. Il s'agit d'une manière pragmatique de valider une nouvelle méthode : on la teste sur sa capacité à produire le même résultat que des méthodes déjà éprouvées. Mais il s'agit là d'une démarche étrangère à la culture scolaire, en raison du contrat didactique classique. En effet, toute technique enseignée à l'école est *a priori* reçue par les élèves comme légitime. Et il est rare qu'un professeur en souligne les aspects éventuellement provocateurs pour en valider le bien-fondé par comparaison avec d'autres méthodes déjà éprouvées. Pour toutes ces raisons, nous nous attendions à ce que cette démarche de validation pragmatique, évacuée des praxéologies « déduction », passe relativement inaperçue dans les expérimentations menées ici. Nous avons toutefois rencontré quelques élèves qui, d'eux-mêmes, y recouraient. Ainsi, ceux qui avaient mobilisé spontanément un calcul de limite : $\lim_{\Delta t \to 0}(2t + \Delta t) = 2t$, pour trouver la réponse une deuxième fois après l'avoir déjà obtenue par la stratégie de l'écart maximum commentent ainsi leur résultat : « Les deux réponses sont les mêmes, donc on suppose que le deuxième procédé est correct même s'il est louche ». De même, avons nous observé le soulagement d'autres élèves lorsqu'ils ont vu que leur solution, basée sur une procédure « infinitésimale », correspondait à celle trouvée par le biais d'une autre stratégie : « Oh, on gère ! ». Dans d'autres classes, c'est l'expérimentateur qui, sur base de ce qu'il avait entendu dans les groupes, a souligné le caractère scandaleux du nouveau calcul identifié – en le rapprochant de la méthode d'adégalité de Fermat – et a mis en évidence le rôle joué par l'existence d'autres méthodes de résolution.

Comme nous l'avons déjà dit, la recherche d'un moment où deux mobiles ont même vitesse n'a pas de caractère fondamental vis-à-vis du savoir visé lorsque le mouvement non uniforme est modélisé par une fonction du second degré, en raison de l'existence d'autres méthodes de résolution qui permettent d'éviter la méthode « infinitésimale ». Et c'est ce qui nous a amenés à remplacer, dans un second temps, ce mouvement par un autre dont la loi est une fonction du troisième degré. Ce choix permet d'invalider les deux autres stratégies qui demandent alors d'exprimer qu'une équation du troisième degré a une solution unique ou de maximiser un polynôme du troisième degré, ce que les élèves ne savent pas faire à ce stade. Reste le calcul « infinitésimal » et certains élèves s'y engagent d'emblée sur demande expresse du professeur plus que par conviction, ayant été échaudés par la complication des calculs lors de la recherche précédente :

> M1 : On aurait dû faire la tangente. Avec la tangente, on aurait été tranquilles. Oui, il [Exp] nous a donné une saloperie avec ces escaliers, là. Qui a eu l'idée de ces escaliers là ?
> E1 : C'est moi [ce qui provoque les sourires de E1 et N1].

Ces élèves optent ici pour les notations t et Δt, sans doute par référence à l'institutionnalisation faite par l'expérimentateur à la suite du problème précédent. Mais les calculs deviennent encore plus compliqués, celui de la vitesse moyenne supposant cette fois de mobiliser la formule du cube d'une somme et faisant apparaître, après les simplifications algébriques, un terme contenant Δt et un autre comprenant $(\Delta t)^2$. Le contraste n'en n'est que plus impressionnant entre l'expression de la vitesse moyenne et celle de la vitesse instantanée, réduite à $3t^2$ après annulation de Δt. C'est ce qu'illustre l'échange suivant :

> C1 : C'est hyper facile […] C'est la même chose que l'autre fois. On fait de nouveau "Eh, Δt = 0 !" ».
> E1 : Δt ne peut pas être égal à zéro.
> M1 : Tu mets Δt en évidence. Ça fait $3t^2$ fois Δt, plus $3t(\Delta t)^2$…
> E1 : Ah, oui, oui, je vois.
> C1 : Oui, ça va : c'est pas si long.
> N1 : Cette méthode, quand on la connaît, elle est aussi rapide, oui, que les autres, je trouve.
> C1 : Ça me parait un peu facile.

Les élèves adoptent alors cette méthode au point de ne pas la remettre en cause lorsqu'une vérification faite sur un graphique faux contredira le résultat obtenu. Même si, aux yeux de l'un ou l'autre, elle garde un caractère plus que particulier :

> N1 : Cette méthode […] est aussi rapide, oui, que les autres. […] Mais elle est moins clean.

On peut supposer là que la validation pragmatique de cette méthode joue un rôle et ce, d'autant plus que la fonction $p(t) = t^3$ se comporte comme la fonction $p(t) = t^2$ du point de vue de la croissance et de la concavité, cette dernière caractéristique étant prégnante, comme nous l'avons vu, dans l'identification d'une accélération du mouvement et de la mise en œuvre de l'une ou l'autre stratégie qui en résulte.

Une mise en commun permet enfin au professeur de désigner cette méthode comme la démarche optimale pour répondre à la question posée et les élèves filmés, qui râlaient de devoir suivre la stratégie des marches d'escaliers une nouvelle fois, se réjouissent finalement quand ils voient que leur stratégie est la seule à rester opérationnelle lorsque la loi du mouvement non uniforme est une fonction du troisième degré.

Comme analysé dans cette section, le problème des deux mobiles joue à peu de choses près le même rôle que le problème du vase conique dans l'émergence du concept de vitesse instantanée et ce, en raison de variables didactiques analogues. Un mouvement à vitesse variable y est contrasté avec un mouvement uniforme. Une question relative à l'instant auquel les deux mobiles ont même vitesse pousse les élèves à engager et à mettre à l'épreuve le concept de vitesse moyenne pour localiser l'inconnue dans des intervalles de temps de plus en plus petits. L'algébrisation d'une des stratégies graphiques, portant sur le temps t et son incrément Δt, permet d'identifier un calcul nouveau dans lequel on annule Δt en fin de parcours. Cette méthode, a priori sujette à caution, est confortée par sa capacité à fournir une réponse dont la plausibilité est validée graphiquement et qui, dans un cas au moins, est celle à laquelle conduisent deux autres méthodes déjà institutionnalisées. Cependant, contrairement au problème du vase conique, celui des deux mobiles repose sur une symbolisation graphique de mouvements rectilignes par le biais des lois de position qui leur correspondent. Il y a donc un milieu à créer en amont dont fait partie un rapport idoine des élèves à de tels objets.

5. Du concept de vitesse instantanée à celui de taux de variation instantané

Suite aux deux situations qui ont été analysées jusqu'ici, il reste un travail à faire pour justifier la définition du concept de vitesse instantanée en termes de calcul « infinitésimal ». C'est l'objet de la section 5.a. Dans la section 5.b. ci-dessous, nous tentons d'évaluer le saut à réaliser pour passer du concept de vitesse instantanée à celui de taux de variation instantané.

5.a. Vers la définition du concept de vitesse instantanée

Il s'agit à présent de demander aux élèves, non plus le moment auquel deux mobiles ont même vitesse mais plutôt ce que vaut la vitesse de l'un d'eux en un instant donné. Le mobile en question est celui dont la loi de position est $p(t) = t^3$ et dont la vitesse est $3t^2$ et l'instant choisi est $t = 1{,}5$. On attend des élèves qu'ils considèrent cette formule comme fonction du temps et qu'ils y remplacent tout simplement t par 1,5 pour obtenir la réponse cherchée. Voici le cheminement de quelques-uns d'entre eux, assez significatif de ce que nous avons pu observer dans l'ensemble des groupes.

> C1 : Ben, il y a une deuxième question : quelle est la vitesse de P_1 à $t = 1{,}5$?
> E1 : Ah oui.
> N1 : Ben on fait $(1{,}5)^3$ quoi.
> C1 : Non.
> N1 [croyant rectifier correctement] : Euh, $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ …
> C1 : Non, non … Parce qu'en fait, on demande la vitesse instantanée à t de P_1. Tu vois ?
> N1 [découragé] : Ah, non !
> C1 : Enfin, là, tu fais 1,5 : tu auras la vitesse moyenne jusque $t = 1{,}5$, tu vois ?
> M1 : Tu fais 1,5 … Attends.
> C1 [à M1] : Non ! Parce que, là, ce sera la vitesse moyenne jusqu'à 1,5. Tu dois donner la vitesse instantanée.
> M1 : Mais comment on calcule ça ?
> E1 : Attends. Tu ne peux pas juste remplacer 1,5 dans l'équation, avoir la position … ?
> C1 : Non.
> E1 : … et comme ça, tu as le temps, la position et la vitesse ?
> C1 : Non, parce qu'alors, ce serait la vitesse moyenne jusque $t = 1{,}5$.
> N1 : Ben, attends. On va juste essayer, pour voir.
> C1 : Ce ne sera pas une vitesse instantanée.

M1 a l'idée d'utiliser l'égalité des vitesses moyennes et d'y remplacer t par 1,5. C1 ne voit pas l'intérêt d'utiliser l'égalité puisque la vitesse cherchée ne concerne que la particule P_1. N1 puis E1 comprennent l'intérêt de l'idée de M1 : utiliser l'expression obtenue pour v_1 et d'y remplacer t par 1,5.

> M1 : Mais ce n'est pas $1{,}5 + \Delta t$ machin chouette … C'est ça ?
> E1 : Mais, de toute façon, on obtiendra un chiffre […]
> M1 : Mais oui, mais, ici, tu remplaces le $3t^2$ … tu remplaces par … Oui, par 1,5 … Tu vois, par 1,5 au carré $-\frac{3}{4} = 0$.

C1 : Non ! …
M1 : Tu obtiens la vitesse. Euh, oui …
C1 [continuant sa phrase] : … parce que $\frac{3}{4}$ …
N1 : Ah ! Si, si, si, si.
C1 [terminant sa phrase] : … on s'en fout, on n'en a plus besoin.
M1 [à N1, plus réceptif que C1] : Tu comprends ?
E1 : Non ! Parce que, là, tu as égalisé … Ah oui …
C1 : En $\frac{3}{4}$, on n'en a plus besoin. On te demande juste P_1. On ne te demande plus P_2. P_2, on n'en a rien à foutre.
E1 : Ah mais, le v_1 … On a l'équation de v_1 : il suffit de remplacer *t*.
N1 : Oui.
M1 : Et tu me fais $3 \times 1{,}5$ [on n'entend pas « au carré »].
C1 : Oui mais, quand …
N1 [coupant C1. N1 voit sur sa feuille la formule qu'il avait encadrée $3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2$] : Mais c'est ça, c'est ça, alors !
E1 : Oui c'est ça. C'est v_1.

N1 se rend compte qu'ils ont utilisé la formule qui donne la vitesse moyenne, et non la vitesse instantanée. Mais M1 lui répond immédiatement que « Δt rapprochant de 0 », ils obtiennent bien la vitesse instantanée.

M1 : Et tu remplaces les *t* ?
N1 : Ah non, mais c'est la vitesse …
M1 [qui rectifie] : Δt ?
N1 [qui termine sa phrase après réflexion] : … moyenne.
M1 : Mais oui, mais Δt, Δt rapprochant de 0, donc c'est 3 fois 1,5 au carré.
N1 : Oui, oui, oui, tu as raison.
C1 : Oui, ça doit être ça.

Comme le montre cet échange, l'adoption d'un point de vue fonctionnel ne va pas de soi pour tous les élèves. Pour le comprendre, il convient de se ramener au problème des deux mobiles dont la solution était obtenue par résolution d'une équation : $2t = \sqrt{3}$ dans le cas où le mouvement non uniforme était t^2 et $3t^2 = \sqrt{3}$ dans le cas où c'était t^3. Dans ces deux équations, $\sqrt{3}$ est la vitesse constante d'un des deux mobiles tandis que l'autre membre est la vitesse variable de l'autre mobile. Mais il est possible de résoudre le problème sans identifier $2t$ ou $3t^2$ comme la loi de vitesse du mobile P_1. On peut même arriver à ces équations en égalant non pas des vitesses mais des écarts de position, ce qui n'était pas le cas des élèves filmés ici. En outre, à supposer que les élèves identifient bien $2t$ ou $3t^2$ comme la vitesse instantanée du mobile concerné, il faut qu'ils changent de point de vue pour regarder cette formule non pas comme un des membres d'une équation mais comme une fonction de t, ce qui ne va pas de soi ainsi que montré par plusieurs chercheurs (e.a. Sierpinska 1992). Toutefois, c'est un retour en arrière qui permet aux élèves d'adopter le bon regard. En effet, c'est en considérant l'égalité des vitesses moyennes des deux mobiles du problème précédent que les élèves réalisent d'abord qu'un seul des deux mobiles est ici concerné et, ensuite, qu'il convient d'y remplacer Δt par 0.

Le problème des deux mobiles reste également une référence pour justifier que, à une loi de position de la forme t^3, correspond une loi de vitesse de la forme $3t^2$. Par exemple, on peut affirmer que la vitesse du mobile concerné, en $t = 1/2$, vaut $3/4$ car, en cherchant l'instant où ce mobile a même vitesse qu'un mobile à vitesse uniforme de $3/4$ comme dans le problème précédent, on tombe sur $1/2$. Et cet argument qui s'appuie sur l'intuition formalisée lors de la situation précédente vaut pour toute valeur de *t*. Évidemment, cela suppose une référence implicite à la bijectivité de la fonction-vitesse en jeu. Qui plus est, on travaille sur un exemple particulier. Mais, n'est-il pas suffisamment probant pour pouvoir conclure que l'expression de la vitesse instantanée d'un mobile, en un instant *t*, est obtenue en annulant Δt de l'expression de sa vitesse moyenne sur $[t, t + \Delta t]$, une fois faites les simplifications algébriques ? On est là en mesure de définir, au moyen d'un tel calcul, le concept de vitesse instantanée. Et c'est un tournant au cours duquel on passe du préconstruit « vitesse » à un concept proprement mathématique et qui est typique, comme nous l'avons dit plus haut, de la transition entre une praxéologie « modélisation » et une praxéologie « déduction ». Évidemment, le concept en question est encore défini à ce stade par l'acte de suppression de termes, comme chez Lagrange, et du chemin reste à parcourir avant de le subordonner au concept de limite formalisé en termes de quantificateurs et d'inégalités. Mais cette forme embryonnaire de définition peut vivre pendant un certain temps et son application à plusieurs exemples suffira à faire émerger, dans les classes, l'idée de certaines régularités dans les résultats et celle de l'existence d'un calcul plus rapide qui s'apparente à notre calcul des dérivées.

Cette première approche du concept de vitesse instantanée lui donne une existence autonome et lui confère certaines propriétés qui heurtent le sens commun. Ainsi, les élèves s'étonneront-ils de devoir accepter qu'une vitesse puisse être négative, si l'on se conforme à la manière de la définir. C'est le moment opportun pour leur faire interpréter une loi de mouvement non monotone et la considération d'un tel graphique permettra de montrer les avantages du nouveau point de vue sur la vitesse : l'unicité d'une définition et du type de calcul la déterminant que la fonction soit croissante ou décroissante et une information donnée par le signe de la vitesse sur le sens de parcours du mobile. La même situation donnera également l'occasion de définir l'accélération instantanée comme résultat d'un même type de calcul appliqué à la vitesse et de montrer que le respect de cette définition se solde par des conséquences qui peuvent paraître cocasses, en particulier l'obligation de parler d'accélération positive sur un intervalle où le graphique de la loi de position est décroissant avec une concavité tournée vers le haut alors que l'on a envie, dans ce cas, de parler de décélération, la courbe étant de moins en moins pentue… C'est le prix de la mathématisation des grandeurs.

5.b. De la vitesse instantanée au taux de variation instantané

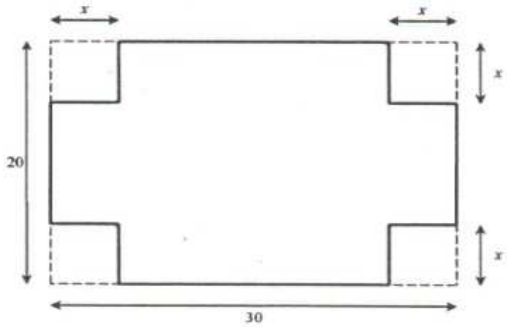
Une dernière situation retient ici notre attention. Il s'agit de faire évoluer la notion de vitesse instantanée en celle plus large de dérivée. Sans prétendre créer pour cela une situation à caractère adidactique, nous avons proposé aux élèves deux problèmes d'optimisation mobilisant une même fonction mais situés, le premier dans un contexte graphico-cinématique et le second dans un contexte géométrique.

Voici l'énoncé du premier problème :

> *Considérons un mobile sur une trajectoire rectiligne dont la loi de mouvement est donnée par la fonction*
> $p(t) = 4(t^3 - 25t^2 + 150t)$. *Entre* $t = 0$ *et* $t = 10$, *à quel(s) instant(s) la distance du mobile à l'origine est-elle maximale. Que vaut alors sa vitesse ?*

Et celui du second :

> *On considère à présent une plaque en tôle dont on a retiré les coins selon la figure suivante. En pliant les bords de cette plaque, on obtient une boîte rectangulaire et sans couvercle. Déterminer la valeur de x telle que le volume de la boîte soit maximum.*



Ce dispositif est dicté par une observation antérieure (Schneider, 1988) : aux prises avec ce dernier problème d'optimisation, peu d'élèves ayant reçu un enseignement standard des dérivées lient le maximum du volume au point où la dérivée est nulle et, lorsqu'ils parlent de tangente, c'est pour évoquer une translation de l'axe *Ox* jusqu'à la hauteur où il frôle le maximum. Nous estimions que le contexte cinématique du premier problème peut aider les élèves à associer l'idée de maximum à l'annulation d'un taux de variation instantané, ici une vitesse. Quant au deuxième problème, il mobilise la même fonction que le premier. Cela peut conduire les élèves à transférer de l'un à l'autre soit la réponse, soit la technique. L'enjeu est d'arriver à faire émerger l'idée que ces deux problèmes font partie de la même classe et ce qui nous intéresse ici c'est l'intelligibilité que les élèves expriment des résolutions de chacun des problèmes et de ce qu'elles ont en commun. La description ci-dessous montre le rôle joué par des *jeux de langage* dans la prise de conscience de certains d'entre eux.

Pour la plupart des élèves, il ne va pas de soi de rapprocher la recherche d'un maximum et l'annulation de la vitesse. Ceux qui en restent aux aspects graphiques ne parviennent qu'à une approximation numérique. L'expérimentateur engage alors les élèves à interpréter le graphique en termes de mouvement :

> Exp : À l'instant qui vous intéresse, il avançait : il se met à reculer. Creusez ce que ça veut dire.

Cette sollicitation guide l'un ou l'autre d'entre eux vers la solution :

> M1 : Calculer à partir de quand il commence à reculer.
> N1 : Alors attends : qu'est-ce que ça veut dire… Ben qu'il a une vitesse positive…
> M1 : Positive au début…
> N1 : Que la pente est positive et puis négative…
> M1 : Ben il faudrait trouver un moyen de calculer à partir de quand, justement, il recule ; de voir par rapport à la vitesse qui est positive puis négative. [...] Il faut voir comment on a calculé les vitesses à partir des équations : il y a peut-être moyen de trouver l'équation de la vitesse. Enfin, tu vois, on avait à chaque fois trouvé une équation d'une vitesse. On avait… Tu vois, $3t^2$… $3t^2$ pour celle-là. [...] Donc, tout simplement plus grand que zéro, il n'y a pas moyen ? On dit tout simplement : quand […]. Tu vois ? Ou bien, non : vitesse égale à zéro… Mais oui : elle augmente… Le moment où elle [la vitesse] sera égale à zéro, c'est le moment où elle [la distance] sera plus grande, parce ce qu'elle [la distance] augmente puis elle descend.
> N1 : Oui, c'est ça.
> E1 : Oui, elle sera égale à zéro.
> C1 : Quand v est égale à 0, oui.
> N1 : Oui, c'est ça, où la pente est nulle.

Lorsque l'expérimentateur revient dans leur groupe, les élèves lui expliquent pourquoi ils ont écrit que la vitesse est nulle lorsque la distance est maximale :

> E1 : […] Ici, on sait que la vitesse sera égale à zéro. […] Parce que c'est… Il avance, il s'arrête, et puis il recule.

Lorsqu'ils abordent le deuxième problème, les élèves prennent assez vite conscience d'une similitude formelle, voire d'une similitude graphique, entre les deux problèmes mais n'expriment pas forcément d'intelligibilité quant à la parenté de ceux-ci. Voici ce qu'en disent deux d'entre eux :

> C1 : « Je ne comprends pas comment on peut faire la même chose que l'autre fois vu qu'on n'a pas la vitesse, on n'a pas de vitesse ».
> M1 : « Il faut trouver une excuse pour avoir la vitesse ».

En revanche, quelques secondes plus tard, le même élève construit une procédure similaire à celle employée pour résoudre le premier en envisageant de faire jouer à x et Δx le même rôle qu'à t et Δt précédemment :

> M1 : « Mais, au lieu de dire… On ferait mieux de dire $x + \Delta x$. […] Mais oui mais la vitesse […] On peut utiliser qu'on avait $t + \Delta t$ avant, pour trouver un moment et un moment juste après. Mais là, on peut utiliser la même chose pour dire un volume précis et un volume après. Donc, $x + \Delta x$, enfin, je ne sais pas … ».

Enfin, un élève observe l'intérêt d'avoir proposé les deux problèmes dans cet ordre :

> E1 : « Si on avait commencé par ça [le problème du volume], ça aurait été plus compliqué, disons. Parce que, si on commençait par ça, on ne pouvait pas égaliser cette équation [avec la vitesse instantanée], dire qu'elle était nulle. Donc on n'arrivait pas à trouver cette réponse-là ».

Rappelons l'enjeu majeur de ces deux problèmes : instituer la classe des problèmes d'optimisation à partir de deux d'entre eux, le premier se situant dans un contexte graphico-cinématique, le second faisant partie du cadre géométrique. Comme observé, il ne va pas de soi qu'un problème de distance maximale peut se penser en termes de vitesse nulle. Les élèves s'en tiennent d'abord à des aspects graphiques jusqu'au moment où l'expérimentateur commente le mouvement rectiligne représenté par ce graphique en parlant d'un mobile qui « avance » ou « recule ». C'est là *un langage qui situe l'expérience dans un univers encore peu épuré* : on aurait pu, en faisant référence à un mobile ponctuel qui n'a ni avant ni arrière, parler d'un mouvement dans le sens positif ou négatif sur la trajectoire orientée. Mais c'est un discours qui fait mouche puisque *les élèves s'en emparent pour l'interpréter en termes de vitesse* positive ou négative, ou encore de pente positive ou négative, conformément à ce qui a été enseigné auparavant. Et c'est ce qui permet à l'un d'eux de *convoquer un type de calcul* déjà pratiqué dans des situations antérieures et qu'il appelle « l'équation de la vitesse ». Toutefois, il faut remarquer que penser à annuler cette vitesse ne lui vient pas directement à l'esprit car il semble envisager tout d'abord de résoudre une inéquation : « tout simplement plus grand que 0 ». Par contre, une fois exprimée (par un autre) cette idée d'annulation, tous les élèves s'en emparent ; l'un d'eux l'interprète en termes d'annulation de la pente et un autre la justifie en revenant au mobile qui « s'arrête » entre le moment où il « avance » et celui où il « recule ». On voit ici s'entremêler plusieurs *jeux de langage*, le discours portant dialectiquement sur le mouvement d'un mobile dans un langage proche du quotidien, sur des savoirs physiques déjà construits comme le signe de la vitesse ou son annulation, sur des connaissances graphiques ou symboliques qui les traduisent : la pente, une inéquation ou une équation. On peut donc conclure que l'univers graphico-cinématique dans lequel les élèves ont été plongés antérieurement a pu constituer, pour ce groupe d'élèves au moins, un univers cognitif permettant une certaine dialectique avec un système d'écritures symboliques.

Comme on l'a dit plus haut, le deuxième problème est d'un point de vue formel équivalent en tout point au premier : même fonction mobilisée, même résolution via un calcul de dérivée et son annulation. Ce pourrait être suffisant pour que les élèves copient la réponse de l'un à l'autre. Ils n'en font rien, même si l'un d'eux est conscient que c'est à dessein que le professeur leur propose les problèmes dans cet ordre. Au delà de l'unité fonctionnelle, il faut ici comprendre qu'une même technique permet de les résoudre tous deux. La difficulté est qu'il faut penser alors à une sorte de pendant de la vitesse dans le deuxième problème, sans pouvoir encore parler de dérivée. Il convient de souligner que le mot même de « dérivée » est significatif d'un autre niveau d'appréhension de ces divers problèmes et atteste que l'on est conscient de les résoudre en cherchant une nouvelle fonction, « dérivée » d'une autre au moyen des règles de dérivation. Mais les élèves concernés n'ont pas encore appris de calcul de dérivées et cherchent, comme l'un d'eux l'exprime, « une excuse pour avoir la vitesse ». A défaut de pouvoir s'appeler « dérivée », l'équivalent de la vitesse dans le problème de la boîte aurait pu être ce que certains nomment le « taux instantané de variation ». Effectivement, le taux est un rapport tout comme la vitesse ; comme celle-ci, il mobilise une variation : ici variation d'un volume au lieu d'une variation de position ; le qualificatif « instantané », par contre, peut paraître incongru dans le problème du volume étant donné que, contrairement au problème de la vitesse, la variable indépendante n'est plus le temps. Et pourtant, comme Schneider (1988) l'a observé, les élèves qui parviennent à injecter une idée de variation là où elle ne va pas de soi a priori le font souvent en référence au temps de déroulement de la pensée et il est symptomatique, de ce point de vue, de voir comment l'élève M1 subodore l'intérêt de remplacer $t + \Delta t$ par $x + \Delta x$ en faisant le parallèle entre, d'une part, « un moment et un moment juste après » et, d'autre part, « un volume précis et un volume après » : c'est bien $x + \Delta x$ qu'il note mais c'est bien « après » qu'il dit. On peut donc penser, au niveau du *type de calculs* considérés à ce stade (qui consistent, rappelons-le, à supprimer des termes contenant Δx dans un taux moyen $\Delta y/\Delta x$), que la locution « taux de variation instantané » facilite la prise de conscience des liens entre les deux problèmes étudiés ici. Même si elle peut favoriser une confusion chez les élèves, entre variation temporelle et variation en fonction d'une variable indépendante quelconque, confusion qui nécessitera de la part du professeur un discours d'explicitation sur la signification du remplacement de t en x. On trouve, dans cet épisode didactique encore, tout l'intérêt d'un jeu de langage approprié pour faire vivre un système de notations donnant prise à une technique nouvelle.

DE SITUATIONS FONDAMENTALES AU DISCOURS TECHNOLOGIQUE PROPRE AUX PRAXEOLOGIES « MODELISATION »

1. Des situations à caractère fondamental

Nous avons cherché à montrer en quoi des lois de mouvements rectilignes pouvaient constituer un milieu pour un apprentissage des dérivées, certains aspects de ce milieu étant alliés et d'autres antagonistes. Dans un premier temps, ces lois données graphiquement autorisent une analyse qualitative et globale des mouvements en termes d'accélération ou de constance de la vitesse ; elles favorisent aussi une forme « en acte » du théorème des accroissements finis dans un contexte particulier : si, sur un intervalle de temps donné, un mobile qui accélère a même vitesse moyenne qu'un mobile animé d'un mouvement uniforme, ils auront tous deux même vitesse (instantanée) en un instant précis de cet intervalle. Dans un second temps, la recherche de cet instant à partir des expressions analytiques des lois de mouvements provoque la mise à l'épreuve du concept de vitesse moyenne et l'identification d'un nouveau calcul où l'on annule Δt dans l'expression de cette dernière, après l'avoir simplifiée. Ce calcul conduit à la formule de la vitesse instantanée du mouvement non uniforme, d'abord impliquée dans une équation dont l'inconnue est le temps, puis mobilisée comme fonction qui donne, à tout instant, la vitesse du mobile. C'est donc la fonction dérivée qui est en jeu, le nombre dérivé n'en étant qu'un sous-produit, soit une de ses images en une valeur particulière de t. Sa légitimité comme modèle mathématique de la vitesse - légitimité qui ne va pas de soi *a priori*, l'annulation de Δt étant sujet à débat - vient, dans ce parcours, non seulement de son instrumentalité dans la résolution de questions qui relèvent de « l'instantané » mais aussi d'une validation pragmatique, le résultat de la nouvelle technique étant mis à l'épreuve par d'autres méthodes. Enfin, le concept de taux instantané de variation permet d'élargir celui de vitesse instantanée, dans un contexte de problèmes d'optimisation, mais cette extension suppose un discours approprié où la référence au temps, utile de prime abord, se doit d'être présentée comme un artifice mental momentané.

Le parallèle fait avec le problème déjà ancien du vase conique (Schneider 1988) non seulement a permis de comprendre la spécificité des situations où les mouvements sont symbolisés par des graphiques et des formules mais a mis aussi en évidence des variables majeures communes aux deux approches et crédibilisé l'analyse relative à leur rôle : en particulier l'existence d'un mouvement dans un contexte où il apparaît non uniforme d'entrée de jeu et où il est contrasté avec un mouvement uniforme, le choix du temps comme inconnue pour provoquer l'émergence d'une procédure infinitésimale, la possibilité d'une validation pragmatique de celle-ci.

Bien sûr, il s'agit d'une toute première approche des dérivées et, qui plus est, ce n'en est qu'une parmi d'autres, les raisons d'être des fonctions dérivées étant multiples. Nous renvoyons à Gantois et Schneider (2009) qui analysent d'autres options d'introduction de ce sujet, en regard de l'intérêt à considérer la vitesse comme un objet mental préfigurant le concept de dérivée. Quoiqu'il en soit, le propre du calcul des dérivées est de fédérer, autour d'une seule et même technique, des types de tâches diversifiés qui en constituent autant de raisons d'être : vitesses, optimisation, tangentes, approximations numériques et autres applications. Aussi pensons-nous qu'il faut faire travailler tous les types de tâches concernés dans leurs aspects spécifiques en considérant la variété épistémologique sous-jacente au calcul de dérivées pour en faire mieux apparaître progressivement son caractère unificateur.

Mais la portée de cet article est plus générale et nous y venons.

2. Un discours technologique incontournable qui s'écarte des standards

On voit dans l'expérimentation s'entremêler plusieurs *jeux de langage*, le discours portant dialectiquement sur le mouvement d'un mobile dans un langage proche du quotidien, sur des savoirs physiques construits ou préconstruits comme la vitesse moyenne ou la vitesse instantanée, sur certaines connaissances graphiques ou symboliques qui leur sont associées : la pente, une inéquation ou une équation. En outre, l'univers graphico-cinématique dans lequel les élèves ont été plongés a pu constituer, pour eux, un univers cognitif permettant une certaine dialectique avec un système d'écritures symboliques.

Au delà de l'identification des moments adidactiques possibles, l'analyse faite ici montre donc que les lois de mouvements peuvent constituer les objets d'un milieu pour l'apprentissage de la dérivée dans la mesure où des jeux de langage appropriés permettent aux élèves de s'emparer de ces objets, que ces jeux soient partagés par les élèves seuls ou engagés par l'enseignant pour les aider à désigner les objets du milieu. Peu nous importe de classifier ces jeux langagiers comme on le fait dans certaines recherches à orientation plus cognitiviste. L'important pour nous est de souligner leur caractère peu standardisé typique des praxéologies « modélisation ». Ainsi, les élèves utilisent des expressions telles que « droite de même vitesse », « pente d'une courbe », « graphes parallèles » pour désigner une droite et une courbe qui ont même pente en une même abscisse… Ils parlent aussi de « réduire à fond » l'intervalle de temps ou encore utilisent le mot « après » alors que le temps est hors contexte. Il n'empêche que ces jeux de langage s'accompagnent d'actions sur des notations qui en rendent compte, telles que l'annulation de Δt dans l'expression d'un taux de variation ou le remplacement de Δt par Δx dans un tel calcul. S'instaure ainsi une dialectique entre notions et notations, au sens où l'entend Mercier (2008) qui débouche sur l'identification d'une nouvelle technique et sur la formulation d'un discours qui la justifie et la rend intelligible eu égard aux questions posées, en bref un discours technologique au sens de Chevallard (1999). En l'occurrence, ce discours technologique n'est pas, ni en tout ni en partie, un discours théorique au sens entendu dans l'institution des mathématiciens. Il repose en effet sur des arguments hybrides mêlant connotations cinématiques et graphiques, la vitesse et son expression graphique y portant des jeux de langage plus primitifs que ceux qu'autorise le concept de dérivée. Ainsi, l'accélération est interprétée en termes de concavité d'une courbe, la vitesse augmentant avec la pente, et la détermination d'un instant auquel deux mobiles ont même vitesse s'appuie sur l'égalité des pentes de deux courbes en un point… Qui plus est, une validation pragmatique a cours ici. Ainsi, la nouvelle procédure « infinitésimale » acquiert une légitimité dans la mesure où elle fournit le même résultat que d'autres méthodes. Un tel discours n'a pas droit de cité au sein de l'analyse mathématique. Et pour cause ! Dans l'analyse standard qui est une praxéologie « déduction », la vitesse instantanée est définie par le biais du concept de limite. Il n'y a donc plus lieu de se demander si une telle vitesse peut être déterminée exactement par un calcul de limite. Quant au concept de limite lui-même, il est un « proof generated concept » au sens de Lakatos (1984), construit pour donner prise à un système de preuves que l'on voulait précisément épurées de toute intuition géométrique ou cinématique. Il permet ainsi de constituer l'analyse comme discipline autonome par rapport à la géométrie et à la physique et de structurer un discours déductif dans lequel les problèmes géométriques et physiques à l'origine du calcul infinitésimal sont relégués dans une ultime section en tant qu'applications de la théorie. C'est là un exemple ce que Chevallard (1999) nomme « une déconnexion franche du cœur théorico-technologique de l'œuvre d'avec ses applications ». Mais aussi un exemple de ce que Freudenthal (1973) appelle une « inversion didactique », soit un exposé à contre-courant de l'histoire. Bien sûr, cette histoire est plus longue et plus complexe que ce que nous en avons décrit ici. Notons entre autres que, de Fermat à Cauchy, les mathématiciens du XVIIIe siècle, dont Euler, ont largement contribué à ce renversement. En fait, le parcours didactique décrit ici restaure une forme d'historicité des notions enseignées en prenant une des applications de l'analyse comme raison d'être du savoir enseigné et en proposant une validation des stratégies engagées qui ne s'appuie pas sur la théorie mathématique achevée[6]. Le travail réalisé rentre donc bien dans le cadre des praxéologies « modélisation » en même temps qu'il fait la part belle au discours heuristique tel que précisé par Schneider (2011) et justifie par là le besoin de parler de discours technologique sans devoir l'assimiler à un discours théorique, fût-il local. C'est que, en fonction du basculement décrit plus haut entre la phase de modélisation et celle de mise en ordre déductif, l'organisation mathématique analysée ici ne constitue pas une réplique d'extraits de celle construite à des fins de théorisation déductive. En cela, comme le montrent les travaux de Rouy (2007), elle rompt radicalement avec la transposition didactique en usage dans l'enseignement secondaire, où prédominent des praxéologies à trous qui imitent le discours théorique dont elles empruntent des éléments emblématiques tout en gommant les aspects jugés inaccessibles pour les élèves concernés. On peut en déduire une fragilité écologique du dispositif didactique analysé ici mais on peut aussi questionner la difficulté éprouvée tant par les chercheurs que par les enseignants à identifier de potentielles praxéologies de modélisation en raison sans doute d'un sentiment de naturalité vis-à-vis des approches inspirées du bourbakisme. Et sans doute cette difficulté participe-t-elle au « monumentalisme » dénoncé par Chevallard dans l'enseignement des mathématiques…

REFERENCES

ASSUDE T., MERCIER A., SENSEVY G. (2007) L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 27(2) 221–252.

BLOCH, I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse de l'Université de Bordeaux 1, http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012151/fr.

BOYER C. (1949) *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York : Dover Publications.

CASTELA C. (1995) Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 15(1) 7–48.

CHEVALLARD, Y. (1991) *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2) 221–265.

FALCADE R. (2006) *Théorie des situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction.* Thèse de l'Université Joseph Fourier de Grenoble.

FREGONA D. (1995) *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques*. Thèse de l'Université de Bordeaux 1 (LADIST).

FREUDENTHAL H. (1973) *Mathematics as an educational task.* Dordrecht : Reidel Publishing Press.

GANTOIS J.Y., SCHNEIDER M. (2009) Introduire les dérivées par les vitesses Pour qui ? Pourquoi ? Comment ? *Petit x* 79 5–21.

[6] La référence importante faite ici au travail de Fermat ne doit pas escamoter l'intérêt de poursuivre ce parcours à la manière des analystes du XVIIIe siècle avant d'en arriver au concept de limite de Cauchy.

GANTOIS J.Y. (à paraître) *Un milieu graphico-cinématique pour l'élaboration d'une technologie des dérivées dans une praxéologie « modélisation »*, Université de Liège : thèse en cours.
HARDY N. (2009) Student's perceptions of institutional practices: the case of limits of functions in college level Calculus courses. *Educational Studies in Mathematics*, 72(3) 341–358.
JANVIER C. (1978) *The interpretation of Complex Cartesian Graphs representing situations – studies and teaching experiments*. Thesis, Shell Center for Math. Education and Université du Québec, Montréal.
LABORDE C., CAPPONI B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14(1/2) 165–209.
LAKATOS I. (1984) *Preuves et réfutations, Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Traduit par Balacheff N., Laborde J.M. Paris : Hermann.
LAKOFF G., NÚÑEZ R. (1997) The Metaphorical Structure Of Mathematics: Sketching Our Cognitive Foundations For A Mind-Based Mathematics. In English L. (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images* (pp. 21–89). Hillsdale, N.J : Erlbaum
LALANDE A. (1932) *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*. Paris : Librairie F. Alcan.
MASCHIETTO M. (2002) *L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices.* Thèse de l'Université Paris 7 et l'Università di Torino.
MERCIER A. (2008) *Questions d'épistémologie des situations*. Conférence introductive au Colloque international de l'AFIRSE, Bordeaux, 18-20 septembre 2008.
PERRIN-GLORIAN M.-J. (1999) Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(3) 279–321.
PIAGET J. (1972) *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant.* Paris : Presses Universitaires de France.
ROSENQUIST M., MCDERMOTT L. (1987) A conceptual approach to teaching kinematics. *American Journal of Physics*, 55(5) 407–415.
ROUCHIER A. (1980) Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1(2) 225–275.
ROUY E. (2007) *Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution secondaire et l'institution universitaire, le cas éclairant du thème des dérivées*. Thèse de l'Université de Liège.
SCHNEIDER M. (1988) *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives.* Thèse de l'Université catholique de Louvain.
SCHNEIDER M. (1992) A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. *Educational Studies in Mathematics* 23 317–350.
SCHNEIDER M. (2008) *Traité de Didactique des Mathématiques*. Liège : Editions de l'Université de Liège.
SCHNEIDER M. (2011) Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ? In Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P. (Eds.). (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* pp.175–206). Grenoble: La Pensée Sauvage.