Une approche anthropologique du didactique

L'étude clinique de la formation des professeurs en TAD
Le cas du développement d'infrastructures mathématiques

Gisèle Cirade

UMR ADEF / UMR EFTS, université Toulouse 2, France

15 octobre 2010
Université de Liège, Belgique

Une grande question

- Quelles difficultés rencontre-t-on quand, étudiant en mathématiques, on décide d'aller vers le professorat de mathématiques ?
- Quelles sont *les conditions et les contraintes* sous lesquelles s'effectue le passage de l'état d'étudiant en mathématiques à l'état de professeur de mathématiques exerçant en collège ou en lycée ?
- Des conditions et des contraintes
  - … dues à la *profession* de professeur de mathématiques ;
  - … exercées par la *formation initiale* des professeurs.

Une étude clinique

- Une formation professionnelle, en IUFM (institut universitaire de formation des maîtres)
- IUFM d'Aix-Marseille (Années 2000-2001 à 2005-2006)
- Élèves professeurs de mathématiques :
  - Futurs professeurs de collège (élèves de 11-15 ans) et de lycée (élèves de15-18 ans).
  - PCL = professeur de collège et de lycée.
- Deux années de formation :
  - 1re année (PCL1) // préparation au CAPES.
  - 2^{e} année (PCL2) // stage en responsabilité en collège ou en lycée.

Une étude clinique

- Recueil de traces écrites
  - Un recueil effectué de manière régulière et quasi systématique dans le cadre de la formation.
- Un accès à la *parole* des formés et des formateurs
  - Rapports des *maîtres de stage*.
  - *Questions de la semaine* et *forum des questions*.
  - Le *séminaire de didactique* pour les PCL2.
  - Comptes rendus d'*observation de séance*.
  - Recueil de *traces écrites d'élèves sur une séquence*.
  - *Mémoires professionnels*.
  - Etc.

Une étude clinique

- Des traces écrites
  - … non sollicitées par le chercheur ;
  - … non rédigées en vue de contribuer à répondre à la question étudiée.
- Des *matériels*
  - *« Terme utilisé couramment en psychanalyse pour désigner l'ensemble des paroles et des comportements du patient en tant qu'ils constituent une sorte de matière première offerte aux interprétations et constructions. »*

(J. Laplanche & J.-B. Pontalis, 1967)

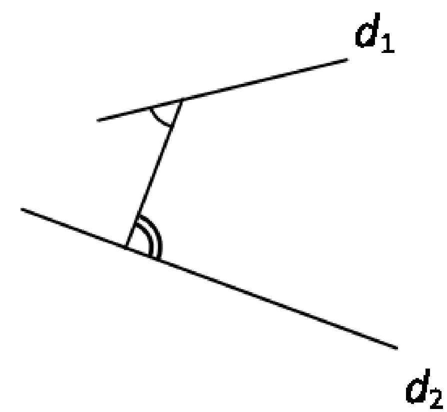
Les *questions de la semaine*

- Les questions de la semaine
  - La parole des élèves professeurs.
  - Une difficulté rencontrée dans le cadre de la formation.
  - Environ 2000 questions en 1re année et 7000 en 2^{e} année (sur six ans d'étude clinique).
- Le forum des questions
  - La parole des formateurs.
  - Élaboration, à l'aide des connaissances disponibles jusque-là, d'éléments de réponse à certaines de ces questions.

Les angles alternes-internes

Les angles alternes-internes

- Des *questions de la semaine*
  - Quelle définition donner des angles alternes internes ? (Il y a deux possibilités : le cas où les droites sont parallèles et le cas plus général.) (2000-2001, 5e, semaine 7)
  - Même si d_1 et d_2 ne sont pas parallèles, peut-on dire que les angles marqués sur la figure ci-contre sont alternes-internes ? (2002-2003, 2de, semaine 17)



Les angles alternes-internes

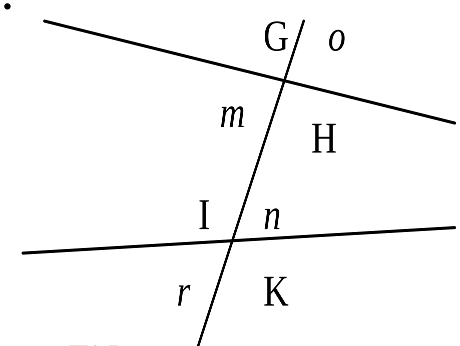
Programme de la classe de 5ᵉ (en 2005-2006)

(élèves de 12-13 ans)

- **Contenus**. Caractérisation angulaire du parallélisme.
- **Compétences exigibles**. Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante. Connaître et utiliser les expressions : angles adjacents, angles complémentaires, angles supplémentaires.
- **Commentaires**. On pourra utiliser également le vocabulaire suivant : angles opposés par le sommet, alternes-internes, correspondants.

Les angles alternes-internes

- Le *forum des questions* : un extrait d'un manuel de géométrie niveau collège (programme du18 avril1947)
  - Lorsque deux droites sont coupées par une sécante, elles forment huit angles ; les quatre angles compris entre les droites se nomment **internes** ou **intérieurs** ; les quatre autres se nomment **externes** ou **extérieurs**.
  - On appelle angles alternes-internes deux angles situés de part et d'autre de la sécante, à l'intérieur des droites et non adjacents. Exemple : les angles *m* et *n*, ainsi que H et I.



Les angles alternes-internes

- Une autre *question de la semaine*
  - Le thème de la « caractérisation angulaire du parallélogramme » se situe dans le secteur « Transformation de figures par symétrie centrale. Parallélogramme ». Pourtant on voit que « seules les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante » figurent dans les compétences exigibles. Il n'y a donc pas caractérisation. […] (2001-2002, 5^{e}, semaine 8)
- La caractérisation angulaire du parallélisme
  - Soit deux droites coupées par une sécante commune.

    Si les droites sont parallèles, alors les angles alternes-internes sont égaux.

    Si les angles alternes-internes sont égaux, alors les droites sont parallèles.

Les angles alternes-internes

- L'examen des manuels
  - Une « définition » des angles alternes-internes uniquement dans le cas de deux droites *parallèles* coupées par une sécante.
  - L'impossibilité de formuler la deuxième assertion : « Si les angles alternes-internes sont égaux, alors les droites sont parallèles. »
  - L'introduction, dans certains manuels, de l'expression « angles *en position* d'alternes-internes ». [Voir, diapositive suivante, un extrait d'un manuel de 1989]

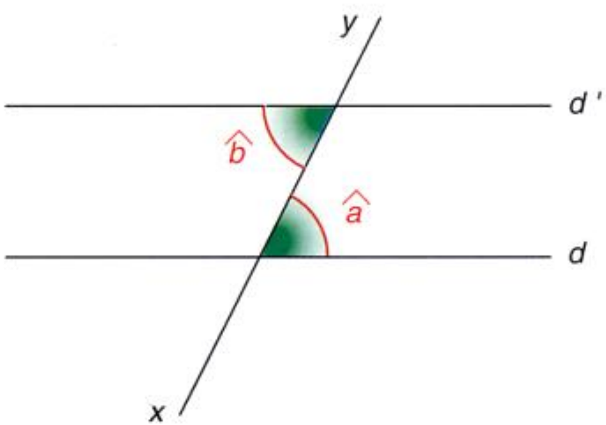
Les angles alternes-internes

UTILISER DES ANGLES POUR RECONNAÎTRE DES PARALLÈLES

(xy) est une sécante aux droites d et d'.

Lorsque l'on sait que $\widehat{a} = \widehat{b}$

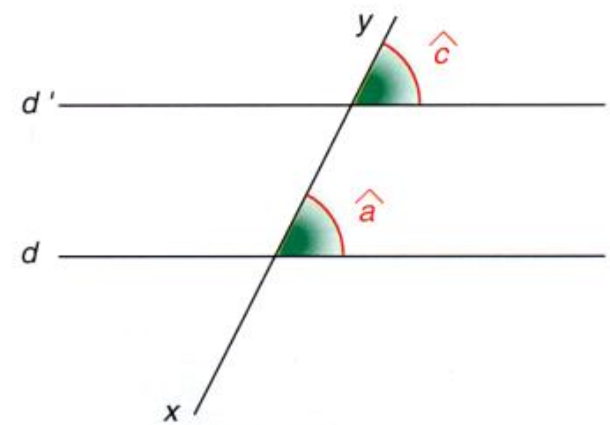
(angles en position d'alternes-internes)



alors on peut affirmer que les droites d et d' sont **parallèles.**

Lorsque l'on sait que $\widehat{a} = \widehat{c}$

(angles en position de correspondants)



alors on peut affirmer que les droites d et d' sont **parallèles.**

Un problème de la profession

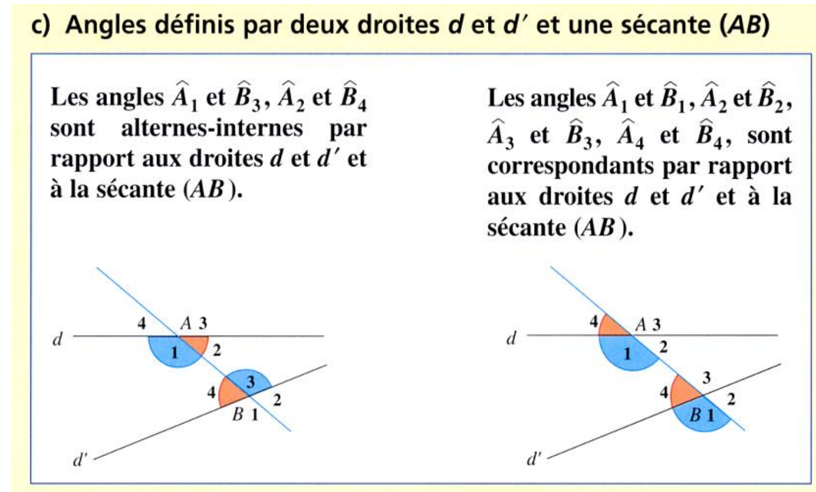
- Une difficulté du *métier*.
- Un problème de la *profession* de professeur.
- *Profession* : un vaste ensemble incluant, à côté des professeurs, les animateurs et responsables de l'enseignement des mathématiques, et aussi les chercheurs – mathématiciens, didacticiens ou autres – travaillant spécifiquement sur des *problèmes de la profession*.

Un problème de la profession

- Un état historique, où le professeur est regardé comme « un petit producteur indépendant »
- Une *semi-profession*
  - Amitai Etzioni, 1969.
  - *The semi-professions and their organization: Teachers, nurses, social* workers.
- Dans une profession
  - Une difficulté du métier // Un problème *pour* la profession = Un problème que la profession doit résoudre pour l'ensemble de ses membres.

Un problème de la profession

- Un problème en voie de règlement.
  [Un manuel de 2001]



c) Angles définis par deux droites *d* et *d′* et une sécante (*AB*)

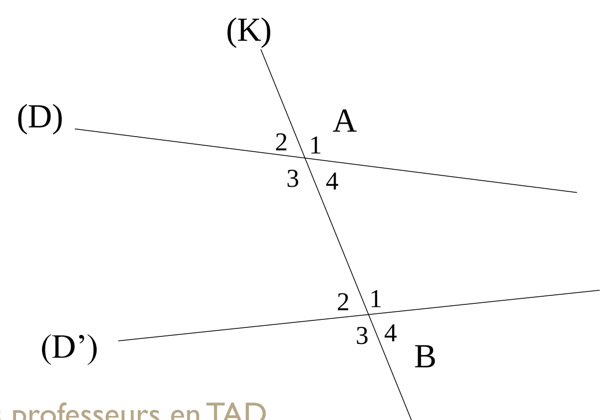
Les angles $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_3$, $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_4$ sont alternes-internes par rapport aux droites *d* et *d′* et à la sécante (*AB*).

Les angles $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_1$, $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_2$, $\widehat{A}_3$ et $\widehat{B}_3$, $\widehat{A}_4$ et $\widehat{B}_4$, sont correspondants par rapport aux droites *d* et *d′* et à la sécante (*AB*).

- Un équilibre encore fragile : « Lorsque deux droites sont coupées par une sécante, elles déterminent deux paires d’angles alternes-internes. Les angles de chaque paire, non adjacents, sont situés : de part et d’autre de la sécante ; *à l’intérieur de la bande formée par les deux droites*. » [Un manuel de 2010]

Un problème de la profession

- Une origine dans les valeurs promues par la réforme des mathématiques modernes.
- Une difficulté à définir, dans le cas général, ce que sont deux angles alternes-internes.
  - Angles alternes : les secteurs angulaires sont de part et d'autre de la sécante.
  - Angle interne : l'un des ses côtés contient le segment [AB].



Des problèmes de la profession

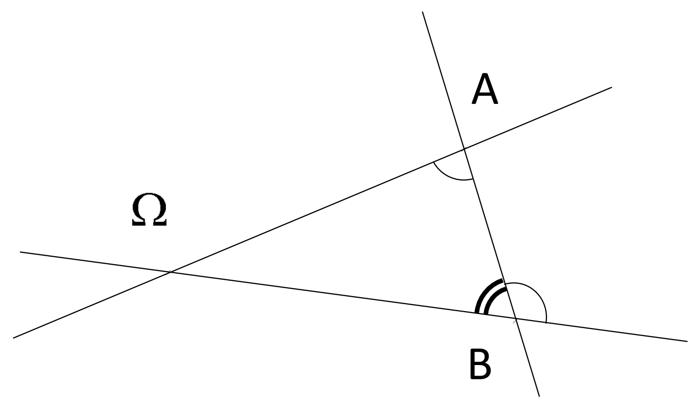
- Quelle définition ?
- Quelles « démonstrations » ?
  - La propriété directe (si les droites sont parallèles, alors les angles alternes-internes sont égaux).
  - La propriété réciproque (si les angles alternes-internes sont égaux, alors les droites sont parallèles) : on peut, traditionnellement, utiliser la propriété directe.
- Dans la démonstration de la propriété réciproque, un point faible : les questions attachées au *régionnement du plan par une droite*.

Des problèmes de la profession

- Une croyance : les propriétés de l'espace sensible seraient susceptibles d'être déduites a priori, sans recours à l'expérience.
- Un vestige : en géométrie, on organise en un ensemble déductif *d'un seul tenant* toutes les propriétés rencontrées.
- La manière d'arriver à une propriété donnée est alors *la* démonstration de cette propriété.

Des problèmes de la profession

- En formation, un autre paradigme
  - La géométrie comme science de l'espace sensible.
  - Des « îlots déductifs ».
- Un travail à faire, non pas sur *une* axiomatique, mais sur l'*axiomatisation*.
- Un îlot déductif pour la propriété réciproque



La simplification des fractions

La simplification des fractions

- Un précepte : « Ne jamais laisser une fraction non simplifiée ! »
- La notion de forme irréductible d'une fraction au programme de 3^{e} (élèves de 14-15 ans).
- De nombreuses interrogations sur la simplification des fractions en classe de 4^{e} (élèves de 13-14 ans) :
  - En 4^{e}, peut-on suggérer les simplifications des écritures fractionnaires, même si elles ne sont pas au programme ? (2000-2001, 4^{e}, semaine 8)
  - Bien que la mise sous forme de fraction irréductible ne soit pas exigible en 4^{e}, est-il possible d'inciter les élèves à simplifier au maximum ? (Application de la règle d'égalité des fractions.) (2004-2005, 4^{e}, semaine 6)

La simplification des fractions

- La question d'une écriture *canonique*
  - Deux écritures fractionnaires doivent avoir la même écriture canonique pour désigner le même nombre.
- Un résultat : existence et unicité de la forme irréductible
  - On peut écrire de façon unique $a/b = c/d$, où c et d n'ont que 1 comme diviseur commun.
  - Par exemple, 598/435 et 869/635 étant deux fractions irréductibles, on ne peut pas avoir 598/435 = 869/635.

La simplification des fractions

- Dès la classe de 4^{e} , on a un algorithme pour obtenir, de fait, la forme irréductible en « simplifiant au maximum »

  Soit *a*/*b* une fraction de deux entiers. On divise *a* et *b* par des diviseurs communs à *a* et *b* jusqu'à ce qu'on obtienne une fraction dont le numérateur et le dénominateur n'ont plus de diviseur commun autre que 1.

La simplification des fractions

- Une technique pour obtenir la forme irréductible :

  « simplifier le plus possible »

- Quelle technologie si l'on ne suppose pas connu le résultat sur l'existence et l'unicité de la forme irréductible ?
  - Existence : la procédure de simplification ne se poursuit pas indéfiniment.
  - Unicité : si a/b et c/d sont deux fractions irréductibles égales, a-t-on $a = c$ et $b = d$?

La simplification des fractions

- On peut le justifier avec le théorème de Gauss, mais il s'agit d'une justification non disponible au collège.
- Une solution : contourner la difficulté par l'introduction d'une nouvelle notion, celle de « forme minimale » :
  - c/d est une forme minimale de a/b s'il n'existe pas de fraction c'/d' telle que $c' < c$ et $c'/d' = c/d = a/b$.
- Unicité de la forme minimale : immédiat.

La simplification des fractions

- Existence d'une forme minimale :
  - On considère l'ensemble des entiers c tels qu'il existe d avec $c/d = a/b$.
  - Cet ensemble n'est pas vide : il contient a, $2a$, $3a$, etc.
  - On prend le plus petit élément de cet ensemble : c'est fini ! [$\mathbb{N}$ est bien ordonné.]
  - [Il reste à vérifier que la forme minimale et la forme irréductible sont les mêmes.]

La simplification des fractions

- Une justification de l'algorithme mise en œuvre *de facto* au collège.
- Un environnement technologico-théorique *compatible* avec la « *théorie numérique disponible* » au collège.
- Un exemple de praxéologie mathématique dont la *profession* gagnerait à s'équiper.
- Un exemple de « praxéologie pour la profession ».

Les praxéologies pour la profession

- L'équipement praxéologique des membres de la profession // *Praxéologies pour la profession*, l'ensemble des praxéologies dont la profession peut avoir avantage à s'équiper.
- Une étude clinique qui met en évidence des problèmes de la profession.
- Une étude clinique qui permet de dégager des carences infrastructurelles.

Les praxéologies pour la profession

- Une catégorie unique (et ouverte) : les *praxéologies pour la profession*.
  - Elle inclut les connaissances indispensables pour *identifier* les praxéologies à enseigner.
- Une sous-catégorie : les *praxéologies pour l'enseignement*.
  - Les praxéologies didactiques relatives à telle ou telle praxéologie à enseigner.
  - Les praxéologies mathématiques directement utiles pour concevoir et construire ces praxéologies didactiques.
- Une sous-catégorie de la précédente : les *praxéologies à enseigner*.

Les *questions* et les *réponses*

- Des *questions* soulevées par l'exercice du *métier* (ici, dans le cadre d'une formation professionnelle)
- Des *réponses* à *créer*
  - Nécessité d'une recherche idoine, incluant des recherches fondamentales.
  - Une contribution au développement de la profession.

La question des *questions*

- L'étude clinique permet de dégager les *questions* soulevées par l'exercice du métier.
- Un phénomène classique dans la « science faite » : tout tend à masquer la genèse des œuvres et leurs raisons d'être.
- Une référence au champ des mathématiques : William P. Thurston, lauréat de la médaille Fields en 1982, dans un article publié en 1994. [Voir diapositive suivante]

La question des *questions*

- If what we are doing is constructing better ways of thinking, then psychological and social dimensions are essential to a good model for mathematical progress. These dimensions are absent from the popular model. In caricature, the popular model holds that
- **D.** mathematicians start from a few basic mathematical structures and a collection of axioms "given" about these structures, that
- **T.** there are various important questions to be answered about these structures that can be stated as formal mathematical propositions, and
- **P.** the task of the mathematician is to seek a deductive pathway from the axioms to the propositions or to their denials.
- We might call this the definition-theorem-proof (DTP) model of mathematics. A clear difficulty with the DTP model is that it doesn't explain the source of the questions.

La question des *questions*

- *Identifier*, peu à peu et collectivement, les *questions* vives qui se posent aux professionnels
- *Dégager* des *problèmes* de la profession
- Une *possibilité* offerte par l'*étude clinique* de la formation
  - Questions de la semaine
  - Comptes rendus d'observation
  - Recueil de traces écrites d'élèves durant une séquence
  - Mémoires professionnels
  - Etc.

La question des *réponses*

- Travailler à construire des réponses aux questions dégagées // (re)construire des infrastructures.
  - Identification, analyse et évaluation des réponses $R^{\Diamond}$ existantes
  - Recherche et mise à disposition des œuvres O outillant le travail de production de $R^{\heartsuit}$.
- Organiser la *diffusion* et la *réception* dans le « réseau » des formations et, par delà, dans la profession.
- Une *archiécole* pour la profession : un lieu régulateur où les questions qui émergent, en un mouvement ascendant du métier vers la profession, trouveront à y être étudiées posément.

Quelques références

- Artaud, M. (1993). *La mathématisation en économie comme problème didactique. Une étude exploratoire* (Thèse de doctorat). Marseille : IREM d'Aix-Marseille.
- Chevallard, Y. & Cirade, G. (2009). Pour une formation professionnelle d'université. Éléments d'une problématique de rupture. *Recherche et formation, 60*, 51-62.
- Chevallard, Y. & Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. Dans G. Gueudet & L. Trouche (Éds), *Ressources vives* (pp. 41-55). Rennes : PUR.
- Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Thèse de doctorat). Marseille : Université Aix-Marseille 1. [Disponible sur http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709]
- Cirade, G. (2008). Devenir professeur de mathématiques : les mathématiques comme problème professionnel. Dans G. Gueudet & Y. Matheron (Éds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007* (pp. 249-277). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM.
- Cirade, G. (2008). Les angles alternes-internes : un problème de la profession. *Petit x, 76*, 5-26.
- Cirade, G. (2010). Les professeurs en formation initiale face au casse-tête des nombres. Dans A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 327-347). Montpellier : IUFM.